

---

**NOTES D'ÉTUDES**

---

**ET DE RECHERCHE**

---

**ESTIMATION ET INTERPRÉTATION DES  
DENSITÉS NEUTRES AU RISQUE :  
UNE COMPARAISON DE MÉTHODES**

Eric Jondeau et Michael Rockinger

octobre 1997

**NER # 47**



DIRECTION GÉNÉRALE DES ÉTUDES  
DIRECTION DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES ET DE LA RECHERCHE

**ESTIMATION ET INTERPRÉTATION DES  
DENSITÉS NEUTRES AU RISQUE :  
UNE COMPARAISON DE MÉTHODES**

Eric Jondeau et Michael Rockinger

octobre 1997

**NER # 47**

Les Notes d'Études et de Recherche reflètent les idées personnelles de leurs auteurs et n'expriment pas nécessairement la position de la Banque de France.

# Estimation et interprétation des densités neutres au risque : une comparaison de méthodes

Eric Jondeau\*      Michael Rockinger†

Octobre 1997

## Abstract

In this study we compare the quality and information content of risk neutral densities obtained by various methods. We consider a non-parametric method based on a mixture of log-normal densities, the semi-parametric ones based on an Hermite approximation of Madan and Milne, or based on an Edgeworth expansion of Jarrow and Rudd, the parametric approach of Malz which assumes a jump-diffusion for the underlying process, and eventually Heston's approach assuming a stochastic volatility model. We apply those models on FRF/DEM exchange rate options for two dates, for various maturities. Models differ when important news hit the market (here the 1997 snap elections). The non-parametric model provides a good fit to options prices but is unable under critical circumstances to provide as much information about market participants expectations than Malz's jump-diffusion model.

## Résumé

Nous comparons dans ce papier la qualité et le contenu en information des densités neutres au risque, obtenus à partir de différentes représentations de ces densités : l'approche non-paramétrique fondée sur un mélange de densités log-normales ; les formulations semi-paramétriques fondées sur l'approximation d'Hermite de Madan et Milne ou sur les expansions d'Edgeworth de Jarrow et Rudd ; le modèle de diffusion avec saut de Malz ; enfin le modèle à volatilité stochastique de Heston. Nous appliquons ces modèles aux options de change sur le FRF/DEM pour deux dates et différentes maturités. Les modèles diffèrent nettement quand le marché subit des chocs importants (ici la dissolution de l'Assemblée Nationale). Le mélange de densités log-normales fournit une bonne estimation des prix d'option, mais ne donne pas autant d'information, lors de moments agités, concernant les anticipations des participants au marché que le modèle de diffusion avec saut de Malz.

Mots-clés : Densité neutre au risque, évaluation d'option, option de change.  
JEL classification : C52, G14, F31, F33.

---

\*Banque de France, Centre de recherche.

†HEC - School of Management et Banque de France, Centre de recherche.

Correspondance : Michael Rockinger, HEC - School of Management, Department of Finance, 78351 Jouy-en-Josas, France, ROCKINGER@GWSMTP.HEC.FR.

Nous remercions Sophie Coutant, Bernard Dumas, Pierre Sicsic et Charles Thomas pour leurs précieux commentaires. Toutefois, les erreurs qui subsisteraient restent nôtres. Ce papier ne reflète pas nécessairement les vues de la Banque de France.

# 1 Introduction

L'essentiel de la littérature sur l'évaluation des prix d'option, suivant les travaux séminaux de Black et Scholes (1973) et Merton (1973), suppose que l'actif sous-jacent à l'option suit un processus de diffusion log-normal. Les études empiriques sur la volatilité des options, comme Rubinstein (1994), ont pourtant montré que les options de prix d'exercice différents sont associées à des niveaux de volatilité différents, ce qu'on appelle couramment le *smile* d'option. Ce résultat est en contradiction avec l'hypothèse de log-normalité de l'actif sous-jacent et montre que, pour évaluer correctement les prix d'option, des modèles plus généraux sont nécessaires. Il suggère également que les moments d'ordre supérieur à deux ont un contenu en information : il est en effet possible d'obtenir des indications sur les anticipations des participants au marché concernant les chocs rares et importants (CRI).

Différentes méthodes ont été suggérées pour extraire des prix d'options la densité neutre au risque (DNR) de l'actif sous-jacent. Cette densité est reliée aux anticipations des participants au marché concernant le processus de prix futur dans un environnement neutre au risque. Comme l'ont montré Bahra (1996) et Campa *et alii* (1997), une fois la densité connue, il est possible de calculer les moments de la DNR et des intervalles de confiance. Les DNR jouent donc un rôle important comme outil d'appréciation de la crédibilité de la Banque centrale. Les DNR sont également intéressantes pour un investisseur qui cherche à mesurer comment les anticipations des marchés évoluent au cours du temps.

Dans ce papier, nous décrivons, dans un premier temps, différentes méthodes permettant la construction de DNR. Une première méthode, que l'on peut qualifier de *non-paramétrique*, a été développée par Melick et Thomas (1997) pour l'évaluation des options américaines et adaptée par Bahra (1996) et Sherrick *et alii* (1996) pour les options européennes. Il s'agit d'une représentation de la DNR fondée sur un mélange de densités log-normales. Söderlind et Svensson (1997) ont montré comment cette méthode peut être appliquée à différents actifs financiers, en insistant sur son utilisation du point de vue de la politique monétaire.

Une autre approche est fondée sur le travail de Jarrow et Rudd (1982) qui ont développé une méthode d'évaluation d'option sous l'hypothèse que l'actif sous-jacent n'est pas log-normal. Ils montrent comment les DNR peuvent être obtenues comme une expansion d'Edgeworth autour de la densité log-normale. Nous qualifions ce type d'approche de *semi-paramétrique*. Cette méthode a été mise en œuvre par Corrado et Su (1996). Adoptant une démarche similaire, Madan et Milne (1993) décrivent la DNR obtenue à partir d'une approximation polynômiale d'Hermite. Abken *et alii* (1996) proposent une application et montrent comment les moments d'ordre supérieur à deux de l'actif sous-jacent peuvent varier au cours du temps.

Bates (1996a et 1996b) et Malz (1996) franchissent une étape supplémentaire en supposant que le processus sous-jacent suit un processus de diffusion à saut. Ils supposent une spécification complète du processus de prix du sous-jacent. Nous appelons cette méthode *paramétrique*. Certains modèles spécifient encore davantage le processus de prix du sous-jacent. Il s'agit en particulier des modèles à volatilité stochastique. Hull et White (1987), Chesney et Scott (1989), Melino et Turnbull (1990), Ball et Roma (1994) supposent que la volatilité suit un processus de diffusion. Pour que les modèles puissent être estimés, des hypothèses simplificatrices concernant la corrélation entre la volatilité et le rendement du sous-jacent sont nécessaires. En supposant un processus différent pour la volatilité et utilisant une approche numérique

différente, Heston (1993) fournit une solution *quasi* analytique pour les prix d'option dans un environnement de volatilité stochastique plus général. L'objectif de ces études est de fournir un outil d'évaluation des options. Breeden et Litzenberger (1978) observent que les dérivées secondes des prix d'option par rapport au prix d'exercice de l'option donnent les DNR. A partir de cette relation, Rzepkowski (1996) adapte et applique le modèle de Heston à l'extraction de DNR. Gesser et Poncet (1996) mettent en évidence une structure par terme de volatilité et comparent la structure par terme observée et celles obtenues à partir des modèles de Hull et White (1987) et Heston (1993).

De nombreuses autres approches permettent d'obtenir des DNR. Aït-Sahalia et Lo (1995) proposent une méthode non-paramétrique fondée sur une analyse en série temporelle et l'estimation d'une fenêtre. Stutzer (1996) suggère une procédure fondée sur le principe du maximum d'entropie, dans laquelle l'étape initiale utilise les prix historiques du sous-jacent. Rubinstein (1994) et Jackwerth et Rubinstein (1996) suggèrent une méthode fondée sur les arbres binomiaux. Nous restreignons notre étude aux modèles qui ne font pas appel aux arbres et dans lesquels aucun historique du sous-jacent n'est requis.

Nous comparons les avantages et les inconvénients des différentes méthodes en les appliquant aux options de change européennes sur FRF/DEM pour deux dates : le 17 mai 1996, une date choisie de façon aléatoire au cours de laquelle le marché a été calme, et le 25 avril 1997, quelques jours après que le Président Chirac ait annoncé la dissolution de l'Assemblée Nationale.

Contrairement à certains papiers qui s'intéressent à l'évaluation des options avec volatilité variable (Derman et Kani, 1994, Dumas *et alii*, 1996, Dupire, 1994, Shimko, 1993, Stein et Stein, 1991), nous nous intéressons au contenu en information des options pour différentes maturités.

Dans la section 2, nous passons en revue les méthodes retenues pour cette étude. Pour chacune des méthodes, nous présentons les estimations des paramètres. Le contenu économique des estimations est discuté dans la section 3. Dans la section 4, nous comparons les différentes méthodes selon différents critères : vraisemblance, évaluation d'options en échantillon, moments des DNR et intervalles de confiance. La section 5 conclut. Les détails concernant les données et l'estimation des paramètres sont donnés en annexes.

## 2 L'estimation des DNR

Cette section présente les notations et le contexte général au sein duquel nous comparons les DNR. Soit  $S_t$  le prix à la date  $t$  d'une unité de devise étrangère en devise locale<sup>1</sup>. Une option call européenne, pour un actif sous-jacent de prix  $S_t$ , donne à son détenteur le droit d'acheter le sous-jacent au prix d'exercice (ou *strike*)  $K$  à la date d'expiration (ou échéance)  $\tau$ . Puisqu'un investisseur rationnel n'exercera son droit que s'il réalise un profit, le gain d'un call s'écrit  $\max(S_\tau - K, 0)$ . Une option put européenne, pour un actif sous-jacent de prix  $S_t$ , donne à son détenteur le droit de vendre le sous-jacent au prix d'exercice  $K$  à la date d'expiration  $\tau$ . Le gain d'un call s'écrit  $\max(S_\tau - K, 0)$ . Pour des options européennes, l'exercice avant  $\tau$  est impossible. Sous l'hypothèse que le marché est complet et parfaitement arbitré, on

---

<sup>1</sup>Pour les options sur FRF/DEM,  $S_t$  est le nombre de FRF nécessaires pour acheter une unité de DEM.

peut montrer qu'il existe une mesure de probabilité unique (dite neutre au risque), équivalente à la probabilité historique, pour laquelle le prix de l'option call s'écrit comme l'espérance actualisée du *payoff*, tel que<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} C(S_t, T, K | \theta) &= e^{-rT} E_Q [\max(S_\tau - K, 0)] \\ &= e^{-rT} \int_{S_\tau=K}^{+\infty} (S_\tau - K) a(S_\tau, \tau; S_t, t | \theta) dS_\tau \end{aligned} \quad (1)$$

où  $E_Q$  représente l'espérance sous la probabilité neutre au risque  $Q$ ,  $a(\cdot)$  est la densité de probabilité neutre au risque du processus de prix du sous-jacent et  $\theta$  le vecteur des paramètres décrivant la DNR.  $T = \tau - t$  est la maturité résiduelle .

## 2.1 Le cas log-normal (Garman et Kohlhagen, 1983)

### 2.1.1 Le modèle

L'essentiel de la recherche sur les options suppose un processus de prix pour le sous-jacent. On peut admettre par exemple que  $S_t$  suit un processus d'Itô (diffusion log-normale) tel que

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2)$$

où  $\mu$  et  $\sigma$  représentent respectivement l'espérance et la volatilité instantanées du rendement de l'actif.  $W_t$  est un mouvement brownien pour la mesure de probabilité réelle  $P$ . Sous une telle hypothèse pour l'actif sous-jacent, on peut montrer que, dans un monde neutre au risque,  $S_t$  peut être récrit sous la forme :

$$dS_t = (r - r^*) S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q \quad (3)$$

où  $W_t^Q$  est un nouveau mouvement brownien pour la mesure de probabilité  $Q$ , équivalente à  $P$ .  $r$  et  $r^*$  représentent respectivement les taux d'intérêt sans risque, composés continûment, domestique et étranger. La densité  $a(S_\tau, \tau; S_t, t | \sigma)$  s'écrit alors simplement sous la forme d'une densité log-normale<sup>3</sup>

$$a(S_\tau, \tau; S_t, t | \sigma) = LN(S_\tau; m, s) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi} s S_\tau} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln(S_\tau) - m}{s} \right)^2 \right]$$

avec  $m = E(\ln(S_\tau)) = \ln(S_t) + (r - r^* - \frac{1}{2}\sigma^2)T$  et  $s^2 = V(\ln(S_\tau)) = \sigma^2 T$ .

Comme les prix d'options s'expriment comme des espérances tronquées, on en déduit, en notant que  $E[\max(x, 0)] = E[x | x \geq 0] \Pr(x \geq 0)$  :

$$C(S_t, T, K, r, r^* | \sigma) = e^{-rT} (E[S_\tau | S_\tau \geq K] - K) \Pr(S_\tau \geq K)$$

avec

$$E[S_\tau | S_\tau \geq K] = \exp \left( m + \frac{1}{2} s^2 \right) \left[ 1 - N \left( \frac{\ln(K) - m - s^2}{s} \right) \right] \frac{1}{\Pr(S_\tau \geq K)}$$

<sup>2</sup>Cf. Harrison et Pliska (1981) ou Duffie (1988).

<sup>3</sup>Ce résultat provient du lemme d'Ito. De (3) on obtient en effet  $d \ln(S_t) = (r - r^* - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t^*$  et donc  $\ln(S_\tau) = \ln(S_t) + (r - r^* - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma(W_\tau^* - W_t^*)$ . Comme  $W_\tau^* - W_t^*$  est distribué comme une variable normale d'espérance nulle et de variance  $T$ , on obtient que  $\ln(S_\tau) \sim \mathcal{N}(\ln(S_t) + (r - r^* - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T)$ . De plus, si  $\ln(S) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , alors la densité de  $S$  est  $n((\ln(S) - \mu)/\sigma) / (\sigma S)$  et sa fonction de distribution est  $N((\ln(S) - \mu)/\sigma)$ . Ici  $n$  et  $N$  représentent toujours la densité et la densité cumulée d'une loi normale.

et

$$\Pr(S_\tau \geq K) = 1 - N\left(\frac{\ln(K) - m}{s}\right)$$

ce qui donne, après simplifications, la formule d'évaluation de l'option call mise en évidence par Garman et Kohlhagen (1983) :

$$C_{GK}(S_t, T, K, r, r^* | \sigma) = e^{-r^*T} S_t N(d_1) - e^{-rT} K N(d_2) \quad (4)$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r - r^* + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

### 2.1.2 Le lien entre les deltas et les prix d'exercice

Les options de change ne sont pas cotées en prix, pour un prix d'exercice donné, mais en volatilité des options, pour un delta donné. Connaissant la volatilité, le taux de change au comptant, les différents taux d'intérêt et la maturité résiduelle, il existe une relation bijective entre les deltas et les prix d'exercice.

Le delta d'une option est défini comme la dérivée du prix par rapport au sous-jacent. On a donc, pour un call :

$$\delta^C = \frac{\partial C_{GK}}{\partial S_t}(S_t, T, K, r, r^* | \sigma) = e^{-r^*T} N(d_1)$$

$\delta$  est une fonction strictement décroissante de  $K$ , donc, pour chaque  $\delta$  il existe un prix d'exercice unique qui peut être extrait à partir d'une procédure d'optimisation non linéaire. Comme les calls et les puts sont reliés à travers la parité put-call, si nous avons le prix d'exercice  $K$  pour un call, alors  $1 - \delta$  correspond à un put de même volatilité et de même prix d'exercice. En d'autres termes, plutôt que de travailler avec des calls et des puts, nous ne considérons que des calls. Une fois obtenu le prix d'exercice  $K$ , il est possible d'inverser la formule d'évaluation (4) pour chaque option et d'obtenir un prix en FRF<sup>4</sup>.

Le graphique 1 représente la volatilité d'une option en fonction du delta. Sous l'hypothèse de log-normalité, nous devrions observer des lignes horizontales. La déviation est appelée *smile* d'option. Ici, les options associées à de petites valeurs de  $\delta$  (des prix d'exercice élevés) sont chères, indiquant une anticipation de hausse du taux de change (de dépréciation du franc).

Connaissant les prix d'option en FRF pour une maturité et pour différents prix d'exercice donnés, on peut se demander quelle est la valeur de  $\sigma$  qui donne simultanément la meilleure description des prix d'option observés pour une maturité donnée. Le tableau 1 présente les paramètres estimés de la densité log-normale. On note que pour la première date, la volatilité implicite augmente, indiquant une plus grande incertitude à long terme. Elle semble diminuer pour la seconde date. On remarque également la forte augmentation de l'écart-type de la volatilité, suggérant que le modèle de Garman et Kohlhagen a certaines difficultés à réconcilier les données avec la théorie.

<sup>4</sup>Si les prix étaient cotés en numéraire, alors, comme le prix du sous-jacent varie, il serait nécessaire de mettre à jour régulièrement les prix d'exercice des options (comme pour les options de taux).

## 2.2 Une approche non-paramétrique

Si l'on considère l'équation de prix de l'option call (1), on obtient en appliquant la loi de Leibniz, comme dans Breeden et Litzenberger (1976), que<sup>5</sup>

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(S_t, T, K, r, r^* | \sigma) = e^{-rT} a(K, \tau; S_t, t | \theta). \quad (5)$$

Donc une première méthode d'extraction de la DNR peut être fondée sur un calcul numérique de la dérivée seconde. Cette approche suppose qu'il existe suffisamment de prix d'exercice pour évaluer numériquement les dérivées secondes. Or ces dérivées numériques sont instables et cette méthode ne permet pas de lisser les irrégularités provenant des prix d'option et peut donc parfois conduire à des probabilités négatives. Ces irrégularités peuvent être dues, par exemple, à l'utilisation des milieux de fourchette *bid-ask* sur les marchés au gré à gré ou à l'absence de simultanéité des cotations des prix d'option et du sous-jacent.

Une stratégie alternative consiste à lisser au préalable la DNR à partir d'un mélange de densités, sous la forme :  $a(S_\tau, \tau; S_t, t | \theta) = \sum_{i=1}^M \alpha_i b(S_\tau, \tau; S_t, t | \theta_i)$ . Ici  $b(S_\tau, \tau; S_t, t | \theta_i)$  représente une densité donnée,  $\theta_i$  est le vecteur de paramètres associé à la densité  $i$  et  $M$  est le nombre de densités que l'on souhaite combiner. Bahra (1996), Melick et Thomas (1997) et Söderlind et Svensson (1997) retiennent un mélange de densités log-normales<sup>6</sup>, soit

$$a(S_\tau, \tau; S_t, t | \theta) = \sum_{i=1}^M \alpha_i LN(S_\tau; \mu_i, \sigma_i \sqrt{T})$$

avec  $\sum_{i=1}^M \alpha_i = 1$ . Ici  $\theta_i = (\mu_i, \sigma_i)$ , où  $\sigma_i$  est la volatilité annualisée.

Dans ce cas, le prix d'une option call (1) peut être réécrit, en utilisant à nouveau la formule de l'espérance tronquée d'une loi log-normale, sous la forme :

$$C(S_t, T, K, r, r^* | \theta) = e^{-rT} \sum_{i=1}^M \alpha_i \left( \exp\left(\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2 T\right) \left[1 - N\left(\frac{\ln(K) - \mu_i - \sigma_i^2 T}{\sigma_i \sqrt{T}}\right)\right] - K \left[1 - N\left(\frac{\ln(K) - \mu_i}{\sigma_i \sqrt{T}}\right)\right] \right) \quad (6)$$

De plus, il est utile d'imposer la contrainte que, sous la probabilité neutre au risque, le taux de change au comptant anticipé devrait être égal au taux à terme observé :

$$S_t e^{(r-r^*)T} = \sum_{i=1}^M \alpha_i \exp\left(\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2 T\right).$$

Les paramètres à estimer sont donc les  $(M-1)$  probabilités  $\alpha_i$ , les  $M$  espérances  $\mu_i$  et volatilités  $\sigma_i$ .

Le tableau 2 présente les estimations des paramètres pour le mélange de deux densités log-normales. Il est possible d'obtenir une mesure de la taille des CRI, à

<sup>5</sup>Breeden et Litzenberger (1976) suggèrent ainsi d'évaluer la DNR à partir de l'approximation

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} \approx \left[ \frac{C(K_{i+1}) - C(K_i)}{K_{i+1} - K_i} - \frac{C(K_i) - C(K_{i-1}))}{K_i - K_{i-1}} \right] / \left( \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{2} \right).$$

<sup>6</sup>Voir également Roncalli (1997).



partir de  $\mu_2 - \mu_1$ . On note que  $\mu_2 - \mu_1$  est plus petit pour la première date que pour la seconde. La volatilité de l'événement le plus fréquent est à peu près la même pour les deux dates. Pour la première date, la volatilité de l'événement le plus fréquent augmente avec la maturité mais reste stable pour la seconde.

### 2.3 Une approche semi-paramétrique par les polynômes d'Hermite

Cette méthode a été proposée par Madan et Milne (1994) et mise en œuvre dans Abken *et alii* (1996). Madan et Milne notent d'abord que tout prix d'option call peut s'écrire sous la forme

$$C(S_t, T, K|\mu, \sigma) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)Q(x)dx \quad (7)$$

où  $x$  est une variable aléatoire normale centrée réduite,  $g(x)$  est le *payoff* et  $Q(x)$  est la densité, sous la probabilité neutre au risque, de la variable  $x$ . Cette densité est inconnue et de forme quelconque, mais il est possible de changer de mesure de probabilité pour une mesure de référence (ici, la loi normale), sous la forme  $Q(x) = f(x)n(x)$ , où  $f(x)$  est la densité qui permet de changer de mesure neutre au risque.

On note que si  $g$  et  $f$  sont deux fonctions à valeurs réelles ayant des arguments réels, alors  $\langle g|f \rangle = \int_{x \in R} g(x)f(x)n(x)dx$  définit un produit scalaire. L'intérêt de ce changement de mesure est qu'une base pour l'espace de référence gaussien peut être construite à partir des polynômes d'Hermite. Ceux-ci sont définis par l'équation différentielle

$$\Phi_k(x) = (-1)^k \frac{\partial^k n(x)}{\partial x^k} \frac{1}{n(x)}$$

ou, normalisés à une variance unitaire, par  $\varphi_k(x) = \Phi_k(x)/\sqrt{k!}$ . Ils forment un système orthonormal, dans lequel  $\varphi_k(x)$  s'interprète comme le  $k$ -ème actif contingent élémentaire de la base<sup>7</sup>. Madan et Milne (1994) ont montré que tout *payoff*  $g(x)$  d'un actif contingent peut s'écrire d'une façon unique comme une combinaison linéaire des éléments de la base, donc qu'il existe des constantes réelles  $g_0, g_1, \dots$ , telles que

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \varphi_k(x)$$

où  $g_k = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi_k(x)n(x)dx$ . La valeur de marché du *payoff* est donnée par

$$V(g(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \pi_k$$

où  $\pi_k$  est le prix implicite du risque de l'actif contingent élémentaire  $\varphi_k(x)$ .

Abken *et alii* (1996) supposent que, sous la mesure de référence, le processus de prix de l'actif sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique

$$S_\tau = S_t \exp\left(\mu T + \sigma\sqrt{T}x_\tau - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) = S_t \exp(\eta T)$$

où  $x_\tau \sim N(0, 1)$  et où  $\eta \sim N\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2, \frac{\sigma^2}{T}\right)$  est le rendement continûment composé. Dans le cas d'une option call, le *payoff*  $g(x)$  de l'option est défini simplement

<sup>7</sup>Les quatre premiers polynômes d'Hermite sont  $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = (x^2 - 1)/\sqrt{2}, \varphi_3(x) = (x^3 - 3x)/\sqrt{6}, \varphi_4(x) = (x^4 - 6x^2 + 3)/\sqrt{24}$ .

par :  $\max [S_t \exp(\eta T) - K, 0]$ . Les coefficients  $g_k$  s'expriment alors dans la base des polynômes d'Hermite sous la forme

$$g_k(S_t, T, K|\mu, \sigma) = \frac{\partial^k \Psi}{\partial u^k}(u, S_t, T, K|\mu, \sigma)|_{u=0} \frac{1}{\sqrt{k!}}$$

où  $\Psi$  est la fonction génératrice pour une option call, définie comme

$$\begin{aligned} \Psi(u, S_t, T, K|\mu, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} C(x, S_t, T, K|\mu, \sigma) e^{-\frac{1}{2}(x-u)^2} dx \\ &= S_t e^{\mu T + \sigma \sqrt{T} u} N(d_1(u)) - KN(d_2(u)) \end{aligned}$$

avec

$$d_1(u) = \frac{\ln(S_t/K) + \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}u}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{et} \quad d_2(u) = d_1(u) - \sigma\sqrt{T}.$$

En outre, les densités de changement de mesure neutre au risque s'écrivent également sous la forme de combinaisons des éléments de la base :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \varphi_k(x)$$

avec  $\beta_k = e^{rT} \pi_k$  (Madan et Milne, 1994). Du fait de l'orthonormalité, on obtient que  $\langle g|f \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} g_k \beta_l \langle \varphi_k | \varphi_l \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \beta_k$ . Comme les  $g_k$  peuvent être calculés exactement, il est possible de retrouver les  $\beta_k$  à partir de l'observation d'un nombre suffisant d'options associées à différents prix d'exercice. En effet, l'équation (7) devient, en tronquant la somme infinie à  $L$

$$C(S_t, T, K|\mu, \sigma) = e^{-rT} \sum_{k=0}^L \beta_k g_k(S_t, T, K|\mu, \sigma) \quad (8)$$

et permet d'estimer les paramètres  $\beta_k$ . Comme  $\sigma$  est un paramètre à estimer, il est nécessaire de disposer d'options pour au moins  $L + 2$  prix d'exercice. Abken *et alii* (1996) retiennent  $L = 4$ .

La densité neutre au risque de la variable  $x$  s'écrit

$$Q(x) = f(x)n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \varphi_k(x) e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

soit, quand la somme est tronquée à  $L = 4$ ,

$$\begin{aligned} Q(x) = n(x) &\left[ \beta_0 - \frac{\beta_2}{\sqrt{2}} + \frac{3\beta_4}{\sqrt{24}} + \left( \beta_1 - \frac{3\beta_3}{\sqrt{6}} \right) x \right. \\ &\left. + \left( \frac{\beta_2}{\sqrt{2}} - \frac{6\beta_4}{\sqrt{24}} \right) x^2 + \frac{\beta_3}{\sqrt{6}} x^3 + \frac{\beta_4}{\sqrt{24}} x^4 \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

Ainsi le processus  $x$  est supposé gaussien standard sous la mesure de référence, mais sa distribution risque neutre  $Q(x)$  peut être clairement beaucoup plus complexe. Or  $x$  peut être exprimé en fonction du prix du sous-jacent  $S_\tau$  sous la forme

$$x = \frac{\ln(S_\tau) - \ln(S_t) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Il est donc aisé de retrouver la DNR associée au sous-jacent  $S_\tau$ , qui s'écrit sous la forme

$$a(S_\tau, \tau; S_t, t|\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}S_\tau} Q \left( \frac{\ln(S_\tau) - \ln(S_t) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right)$$

Le terme entre crochets dans (9) permet donc de définir une DNR différente de la densité log-normale. Pour que  $a(S_\tau, \tau; S_t, t|\theta)$  soit bien une densité (intégrale égale à 1), on doit avoir  $\beta_0 = 1$ . En outre, pour que les deux premiers moments de  $a(S_\tau, \tau; S_t, t|\theta)$  soient les mêmes que ceux obtenus par la méthode de Garman et Kohlhagen, on doit avoir  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  (Abken *et alii*, 1996). Comme l'évaluation est réalisée sous l'hypothèse de neutralité vis-à-vis du risque, on a la contrainte supplémentaire  $\mu = r - r^*$ . Finalement, les paramètres à estimer sont la volatilité  $\sigma$ , ainsi que les prix implicites associés à la skewness et à la kurtosis, définis par  $\pi_3 = e^{-rT}\beta_3$  et  $\pi_4 = e^{-rT}\beta_4$ <sup>8</sup>.

Le tableau 3 présente l'estimation de ces différents paramètres. La volatilité augmente avec les maturités pour la première date ; le prix implicite associé à la skewness augmente alors que celui associé à la kurtosis diminue. Pour la seconde date, la volatilité est stable et les prix associés à la skewness et à la kurtosis augmentent.

## 2.4 Une approche semi-paramétrique par les expansions d'Edgeworth

Cette section présente la méthode proposée par Jarrow et Rudd (1982), dont une application numérique se trouve dans Corrado et Su (1996). Jarrow et Rudd notent que, en l'absence de log-normalité pour la DNR, on peut approximer  $a(S_\tau, \tau; S_t, t|\theta)$  par une expansion d'Edgeworth autour de la densité log-normale<sup>9</sup>.

Soit  $A$  la fonction de distribution cumulée associée à la DNR  $a$ <sup>10</sup>. On définit  $\tilde{\mu}_j(A) = \int s^j a(s) ds$  le  $j$ -ème moment non-centré d'une variable aléatoire  $X$  distribuée selon  $A$  et  $\mu_j(A)$  le  $j$ -ème moment centré de  $X$ . La fonction caractéristique de  $X$  est  $\xi(A, t) \equiv \int e^{ist} a(s) ds$ . Si  $\tilde{\mu}_j$  existe jusqu'à un ordre  $n$ , alors les  $n - 1$  cumulants  $\kappa_j(A)$  existent et sont définis implicitement par l'expansion

$$\ln(\xi(A, t)) = \sum_{j=1}^{n-1} \kappa_j(A) \frac{(it)^j}{j!} + o(t^{n-1}).$$

Il existe les relations suivantes entre les cumulants et les moments :

$$\begin{aligned} \kappa_1(A) &= \tilde{\mu}_1(A), & \kappa_2(A) &= \mu_2(A), \\ \kappa_3(A) &= \mu_3(A), & \kappa_4(A) &= \mu_4(A) - 3\mu_2(A)^2. \end{aligned}$$

Jarrow et Rudd ont montré que l'expansion d'Edgeworth jusqu'à l'ordre 4 de la vraie distribution de probabilité  $A$  autour de la distribution log-normale  $B$  peut

<sup>8</sup>On montre en outre que la skewness et la kurtosis sont directement proportionnelles à  $\pi_3$  et  $\pi_4$ . On a en effet les relations suivantes :  $\gamma_3 = e^{rT}\sqrt{6}\pi_3$  et  $\gamma_4 = e^{rT}\sqrt{24}\pi_4$ .

<sup>9</sup>Les expansions d'Edgeworth sont fréquemment utilisées en théorie statistique pour obtenir des distributions en écart à la loi normale.

<sup>10</sup>Pour alléger les notations, les densités ne sont définies qu'en fonction du sous-jacent (ainsi  $a(S_\tau) \equiv a(S_\tau, \tau; S_t, t|\theta)$ ) et les prix d'option ne sont définis qu'en fonction de la densité cumulée retenue (ainsi  $C(A) \equiv C(S_t, T, K|\theta)$  où  $\theta$  correspond aux paramètres de la densité  $A$ ).  $b$  et  $B$  désignent dans cette section la distribution et la distribution cumulée log-normales, respectivement.

s'écrire, en imposant l'égalité des premiers moments des densités approchée et réelle,  $\kappa_1(A) = \kappa_1(B)$ , que :

$$a(S_\tau) = b(S_\tau) + \frac{\kappa_2(A) - \kappa_2(B)}{2!} \frac{d^2 b}{ds^2}(S_\tau) - \frac{(\kappa_3(A) - \kappa_3(B))}{3!} \frac{d^3 b}{ds^3}(S_\tau) \\ + \frac{(\kappa_4(A) - \kappa_4(B)) + 3(\kappa_2(A) - \kappa_2(B))^2}{4!} \frac{d^4 b}{ds^4}(S_\tau) + \varepsilon(S_\tau)$$

où  $b(S_\tau)$  est la densité log-normale et  $\varepsilon(S_\tau)$  prend en compte les termes négligés dans l'expansion. Les différents termes de l'expansion correspondent aux ajustements de la variance, de la skewness et de la kurtosis.

Jarrow et Rudd ont montré que

$$\int_{s=K}^{\infty} (s - K) \frac{d^j b(s)}{ds^j} ds = \frac{d^{j-2} b}{ds^{j-2}}(K).$$

Le prix d'une option call européenne associée à un prix d'exercice  $K$  s'écrit alors comme

$$C(A) = C(B) + e^{-rT} \frac{\kappa_2(A) - \kappa_2(B)}{2!} b(K) - e^{-rT} \frac{\kappa_3(A) - \kappa_3(B)}{3!} \frac{db(K)}{dS_\tau} \\ + e^{-rT} \frac{(\kappa_4(A) - \kappa_4(B)) + 3(\kappa_2(A) - \kappa_2(B))^2}{4!} \frac{d^2 b(K)}{dS_\tau^2} + \varepsilon(K) \quad (10)$$

$C(B)$  correspond à la formule (4) de Garman et Kohlhagen. Les cumulants de la loi log-normale sont obtenus de la façon suivante :

$$\kappa_1(B) = S_t e^{(r-r^*)T}, \quad \kappa_2(B) = [\kappa_1(B)q]^2, \\ \kappa_3(B) = [\kappa_1(B)q]^3(3q + q^3), \quad \kappa_4(B) = [\kappa_1(B)q]^4(16q^2 + 15q^4 + 6q^6 + q^8),$$

où  $q^2 = e^{\sigma^2 T} - 1$  et où la première relation vient de l'évaluation sous la probabilité neutre au risque.

Jarrow et Rudd suggèrent d'identifier le moment du second ordre en imposant  $\kappa_2(B) = \kappa_2(A)$ . Cet argument est également justifié sur des bases numériques par Corrado et Su (1996), qui notent qu'en l'absence de cette condition des problèmes de multicolinéarité apparaissent entre les moments du second et du quatrième ordres. Plutôt que d'estimer directement les cumulants dans (10), Corrado et Su (1996) estiment la skewness et la kurtosis, définies respectivement par

$$\gamma_1(A) = \frac{\kappa_3(A)}{[\kappa_2(A)]^{3/2}}, \quad \gamma_2(A) = \frac{\kappa_4(A)}{[\kappa_2(A)]^2}.$$

Ces expressions sont également valables pour la distribution log-normale. Compte tenu de l'hypothèse concernant l'égalité des cumulants du second ordre, on a

$$C(A) = C(B) - (\gamma_1(A) - \gamma_1(B)) e^{-rT} \left( \frac{\kappa_2^{3/2}(B)}{3!} \frac{db(K)}{dS_\tau} \right) \\ + (\gamma_2(A) - \gamma_2(B)) e^{-rT} \left( \frac{\kappa_2^2(B)}{4!} \frac{d^2 b(K)}{dS_\tau^2} \right). \quad (11)$$

Les paramètres estimés sont la volatilité implicite ( $\sigma$ ), la skewness ( $\gamma_1(A)$ ) et la kurtosis ( $\gamma_2(A)$ ).

Le tableau 4 présente les paramètres estimés de la volatilité, de la skewness et de la kurtosis implicites. Nous obtenons encore que la volatilité de la première date augmente avec les maturités. La décroissance de la kurtosis suggère que l'intensité des CRI diminue. Pour la seconde date, la volatilité est à peu près constante à travers les maturités, mais l'augmentation de la kurtosis reflète l'augmentation de la vraisemblance d'un CRI. Les densités sont similaires à celles obtenues par les polynômes d'Hermite.

## 2.5 Densité neutre au risque pour un processus avec saut

Dans cette section, on suppose que  $S_t$  est un processus de diffusion log-normal avec saut, c'est-à-dire la somme d'un mouvement brownien géométrique et d'un processus à saut de Poisson. En présence de risque de sauts, les options ne peuvent plus être évaluées par arbitrage. Le contexte économique et les hypothèses d'évaluation sont décrites dans Bates (1996a). La formule d'évaluation d'option dans le cas d'une diffusion avec saut se trouve dans Cox et Ross (1976) et Bates (1991, 1996a, 1996b). Dans ce cadre, Malz (1996) montre comment extraire de l'information des prix d'option.

Sous l'hypothèse que le processus de prix est la somme d'un mouvement brownien géométrique et d'une composante de saut, on peut écrire que, sous la probabilité neutre au risque

$$dS_t = (r - r^* - \lambda E[k])S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q + k S_t dq_{t,\tau}$$

où  $q_{t,\tau}$  est un compteur de Poisson,  $\lambda$  la probabilité annualisée d'occurrence du saut sur l'intervalle  $(t, \tau)$  et  $k$  l'ampleur du saut. De façon générale,  $k$  pourrait être une variable aléatoire, comme dans Bates (1996a).

Ball et Torous (1983, 1985) et Malz (1997) supposent pour simplifier que, sur l'horizon de l'option, il y aura au plus un saut d'ampleur constante. Dans cette version Bernoulli d'une diffusion avec saut, le prix d'une option call s'écrit simplement comme la combinaison de deux prix d'option call évalués par la méthode de Garman et Kohlhagen :

$$C(S_t, T, K, r, r^* | \theta) = (1 - \lambda T) \cdot C_{GK}(S_t, T, K, r, r^* + \lambda k | \sigma) + (\lambda T) \cdot C_{GK}(S_t(1 + k), T, K, r, r^* + \lambda k | \sigma) \quad (12)$$

où  $(1 - \lambda T)$  représente la probabilité d'absence de saut avant l'échéance et  $\theta = (\sigma, \lambda, k)$ . La DNR s'écrit dans ce cas

$$a(S_\tau, \tau; S_t, t | \theta) = (1 - \lambda T) \cdot LN(S_\tau; m, s) + \lambda T \cdot LN(S_\tau; m + \ln(1 + k), s)$$

avec  $m = \ln(S_t) + \left(r - r^* - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda k\right)T$  et  $s^2 = \sigma^2 T$ .

Le tableau 5 présente les paramètres estimés pour la diffusion avec saut. Pour la première date, la volatilité ( $\sigma$ ) augmente avec la maturité. La probabilité de saut au cours de la période ( $\lambda$ ) et l'ampleur du saut ( $k$ ) augmentent également. Au total, l'impact espéré du saut ( $\lambda k T$ ) augmente. Pour la seconde date, la volatilité de la diffusion diminue. Pour les échéances lointaines, la probabilité de saut au cours de la période diminue, alors que l'ampleur du saut augmente. Au total, l'impact espéré du saut augmente.

## 2.6 Prix d'option en présence de volatilité stochastique

Une alternative à l'hypothèse de diffusion avec saut consiste à supposer, comme dans le modèle de Heston (1993), que la volatilité est stochastique. Dans le modèle de Heston, la dynamique du prix du sous-jacent est supposée donnée par

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{v_t} dW_{1,t} \\ dv_t &= \kappa(\psi - v_t) dt + \gamma \sqrt{v_t} dW_{2,t} \end{aligned}$$

Les paramètres du modèle de Heston sont la volatilité de long terme  $\sqrt{\psi}$ , la vitesse de retour à la moyenne  $\kappa$ , la volatilité de la volatilité  $\gamma$ , la corrélation  $\rho$  entre les deux mouvements browniens  $W_{1,t}$  et  $W_{2,t}$ .  $\sqrt{v_t}$  est la volatilité instantanée. *A priori*,  $v_t$  n'est pas un paramètre à estimer, mais la réalisation d'une variable aléatoire. Cependant, comme il est inobservable, il est assez naturel de l'estimer avec les vrais paramètres. Heston montre que le prix d'une option call s'écrit, par analogie avec la formule de Garman et Kohlhagen

$$\begin{aligned} C(S_t, T, K, r, r^* | \theta) &= e^{-r^* T} S_t P_1 - e^{-r T} K P_2 \\ P_j &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left( \frac{\exp[-ix \ln(K)] f_j(x)}{ix} \right) dx \end{aligned} \quad (13)$$

où la fonction à intégrer peut être construite avec

$$\begin{aligned} u_1 &= 1/2, & u_2 &= -1/2, & a &= \kappa\psi, \\ b_1 &= \kappa + \lambda - \rho\gamma, & b_2 &= \kappa + \lambda \\ d_j &= \sqrt{(\rho\gamma ix - b_j)^2 - \gamma^2(2u_j ix - x^2)} \\ g_j &= \frac{b_j - \rho\gamma ix + d_j}{b_j - \rho\gamma ix - d_j} \\ D_j &= \frac{b_j - \rho\gamma ix + d_j}{\gamma^2} \frac{1 - \exp(d_j T)}{1 - g_j \exp(d_j T)} \\ C_j &= (r - r^*) ix T + \frac{a}{\gamma^2} \left[ (b_j - \rho\gamma ix + d_j) T - 2 \ln \left( \frac{1 - g_j \exp(d_j T)}{1 - g_j} \right) \right] \end{aligned}$$

et

$$f_j = \exp(C_j + D_j v_t + ix \ln(S_t))$$

la fonction caractéristique de  $\ln(S_T)$  solution d'une équation différentielle obtenue grâce au lemme d'Itô.  $\lambda$  est le prix du risque de volatilité. Heston suppose que le prix du risque de volatilité est proportionnel à la variance instantanée  $v_t$  :  $\lambda(S_t, v_t) = \lambda v_t$ . Les paramètres à estimer sont  $a, b_1, b_2, \rho, \gamma$  et  $v_t$ . Mais comme  $\lambda$  n'est pas identifiable, on définit  $\psi^* = \kappa\psi / (\kappa + \lambda)$  et  $\kappa^* = \kappa + \lambda$ . Ainsi la volatilité se comporte dans un environnement sans risque comme

$$dv_t = \kappa^*(\psi^* - v_t) dt + \gamma \sqrt{v_t} dW_{2,t}^*$$

On note que les interprétations de  $\kappa^*$  et  $\psi^*$  comme force de rappel et volatilité de long terme sont toujours valides. Seuls 5 paramètres sont à estimer  $\theta = (\kappa^*, \psi^*, \rho, \gamma, v_t)$ . La DNR s'obtient aisément à partir du calcul numérique de (5).

Le tableau 6 reporte les paramètres estimés pour le modèle à volatilité stochastique. Le paramètre de vitesse de retour à la moyenne est stable à travers les maturités. La volatilité de long terme augmente pour la première date et diminue pour la

seconde, alors que la volatilité instantanée est stable pour la première date et augmente pour la seconde. La corrélation augmente avec la maturité. La volatilité de la volatilité est stable pour la première date, mais diminue fortement pour la seconde date, indiquant une augmentation de l'incertitude pour les maturités courtes.

### 3 Le message

Les tableaux 1 à 6 indiquent qu'une représentation plus complexe de la log-normalité devrait être adoptée pour l'actif sous-jacent et que l'étude des différentes maturités fournit une information supplémentaire. Les représentations paramétriques alternatives sont les diffusions à saut et les processus à volatilité stochastique<sup>11</sup>.

Les méthodes semi-paramétriques fournissent peu d'information sur la dynamique du processus sous-jacent. Nous commençons donc avec l'interprétation de la diffusion avec saut de Bernoulli. Les autres modèles peuvent alors être interprétés à partir de ce modèle. Nous nous concentrons d'abord sur le tableau 5.

Pour la première date, la volatilité annualisée  $\sqrt{\sigma^2 + k^2\lambda}$  du processus augmente avec la maturité, suggérant un haut niveau d'incertitude. L'ampleur du saut  $k$  augmente alors que la probabilité de saut  $\lambda$  diminue. Comme la volatilité globale augmente, la diminution de la probabilité de saut ne compense pas l'augmentation de l'ampleur du saut. Le signe positif de  $k$  indique que les participants au marché anticipent une dépréciation du franc. Donc, pour la première date, les participants au marché pensent que l'incertitude fondamentale augmente avec la maturité et qu'un CRI devient plus probable. Ils pensent également que ce CRI conduira à une dépréciation du franc.

Pour la seconde date, la volatilité annualisée  $\sqrt{\sigma^2 + k^2\lambda}$  reste stable et l'incertitude sur la diffusion  $\sigma$  diminue avec la maturité. Une partie de la volatilité globale doit donc être due à l'augmentation du saut. Cette partie peut être de nouveau décomposée en une anticipation croissante du saut avant échéance et une ampleur du saut plus large. Les participants au marché s'inquiétaient des conséquences de la dissolution de l'Assemblée Nationale par le Président Chirac et ils anticipaient que, d'ici un mois, une dévaluation de 2,6% pouvait se produire avec une probabilité de 7%. A plus long terme, ils étaient confiants que les marchés retourneraient à une condition normale. Pour la seconde date, le niveau d'incertitude global est plus grand que pour la première date.

Concernant le modèle à volatilité stochastique (tableau 6), on note que, pour la première date, il n'existe pas de grande différence entre le niveau de la volatilité présente  $\sqrt{v_t}$  et la volatilité de long terme  $\sqrt{\psi^*}$ . De plus, comme la volatilité de la volatilité  $\gamma$  est constante, aucun CRI n'est anticipé. L'augmentation de la volatilité de long terme correspond à une augmentation de l'incertitude globale dans le modèle de Bernoulli.

Pour la seconde date, la différence entre  $\sqrt{v_t}$  et  $\sqrt{\psi^*}$  est assez importante pour les maturités extrêmes. De plus,  $\gamma$  est élevé, au moins pour les maturités courtes. La volatilité de long terme, qui correspond à la volatilité à échéance, prend en compte l'éventualité d'un CRI, puisque le niveau de la volatilité pour l'option à 1 mois de 7,2% est très élevé en termes annualisés. Le modèle de volatilité stochastique est

---

<sup>11</sup> Théoriquement, elles pourraient être combinées. Jorion (1988) a mis en évidence, empiriquement, que le processus de taux de change présente à la fois une volatilité variable et des sauts. Cf. également Bates (1996b).

donc incapable de rendre compte du fait qu'un CRI peut se produire et est contraint à indiquer cette possibilité par une augmentation de l'incertitude de long terme.

En comparaison avec  $\lambda$  (tableau 5), qui double entre les deux dates pour l'option à 1 mois, on note le même mouvement dans le tableau 6 pour  $\sqrt{\psi^*}$  et  $\gamma$ .

Considérant la première date, on note qu'en passant de l'option à 1 mois à l'option à 12 mois,  $\gamma$  diminue et  $\sqrt{\psi^*}$  augmente, indiquant, comme dans le tableau 5, que l'occurrence de grandes variations est considérée comme normale à plus long terme.

En ce qui concerne le paramètre  $\rho$  mesurant l'importance du lien entre l'augmentation de la volatilité et la dépréciation du franc, on note que cette mesure est plus forte pour la seconde date que pour la première. Ce résultat suggère que les participants au marché anticipent non seulement que plus de CRI doivent se produire avec le 25 avril 1997, mais aussi que ces chocs devraient conduire à une dépréciation du franc.

Notre conclusion est que le modèle à volatilité stochastique fournit une information similaire au modèle de diffusion à saut, mais avec une interprétation plus délicate.

Quand on passe aux modèles semi-paramétriques, on note pour la première date que les expansions d'Edgeworth et les approximations d'Hermite donnent des résultats similaires : la volatilité et la skewness augmentent et la kurtosis diminue avec la maturité. Cela correspond aux résultats obtenus précédemment. Si un CRI se produit, alors il est anticipé être d'une intensité supérieure à long terme et conduire à une dépréciation du franc. De plus, à long terme, certains événements qui seraient considérés comme des CRI sont ici considérés comme normaux.

Pour la seconde date, la volatilité augmente entre les options à 1 mois et 2 mois et reste stable par la suite. La kurtosis augmente pour les deux modèles. La skewness évolue différemment avec la maturité pour la seconde date. Les écarts-types tendent à augmenter pour la seconde date.

Si on considère les représentations graphiques des DNR (graphique 2), on note que, pour la seconde date, certaines probabilités sont négatives pour les méthodes semi-paramétriques. Cela est possible car il s'agit d'approximations de la DNR. Ce résultat peut être interprété comme un signe de mauvaise spécification. Les modèles semi-paramétriques semblent ainsi avoir des difficultés à rendre compte de situations où des chocs importants sont susceptibles de se produire.

Le mélange de densités log-normales, dont les résultats sont présentés dans le tableau 2, montre que la distance entre les moyennes des distributions augmente avec la maturité. Cela correspond à notre résultat précédent selon lequel les CRI sont supposés devenir d'ampleur plus importante. Les probabilités de mélange sont à peu près constantes avec les maturités et l'incertitude annualisée  $\sigma_i$  augmente avec la maturité. Cela correspond à notre résultat précédent selon lequel un nombre de plus en plus grand d'événements rares est considéré comme normal à long terme.

Quand on considère la seconde date (pour laquelle nous avons eu plus de difficultés à obtenir une convergence de l'algorithme), on note des configurations similaires, même si les coefficients sont beaucoup plus élevés. On note également plus d'irrégularités pour un paramètre donné quand on passe d'une maturité à l'autre. Ce résultat peut s'expliquer par le fait que nous tentons d'estimer un grand nombre de paramètres (5) à partir d'un petit nombre d'observations.

Nous pouvons résumer nos résultats de la façon suivante : les modèles qui ont le moins de paramètres semblent plus adaptés que ceux qui en ont beaucoup. Pour



les dates associées à des événements importants, l'interprétation devient toutefois plus difficile. Les modèles semi-paramétriques pourraient être mal spécifiés pour de telles dates. Dans la classe des modèles paramétriques, la parcimonie des paramètres apparaît encore comme préférable. A nouveau, le modèle de diffusion avec saut apparaît plus adapté.

## 4 Autres éléments de comparaison des modèles

### 4.1 Vraisemblance et évaluation d'option

Les tableaux 1 à 6 permettent une comparaison des log-vraisemblances. On note que le modèle log-normal présente systématiquement une vraisemblance inférieure à celle des autres méthodes. Dans la classe des modèles semi-paramétriques, les vraisemblances obtenues avec les expansions d'Edgeworth et les polynômes d'Hermite sont similaires pour les deux dates et toutes les maturités. Ces méthodes paraissent jouer un rôle intermédiaire entre les approches les mieux et les moins bien adaptées. Pour la première date, le mélange de log-normales domine clairement les autres modèles pour toutes les maturités. Pour la seconde date en revanche, le classement est plus ambigu : pour les maturités courtes, le mélange de log-normales et, dans une certaine mesure, le modèle de diffusion à saut, donnent les vraisemblances les plus élevées. Pour les maturités plus longues (6 et 12 mois), le mélange de log-normales domine clairement les autres modèles ; pour cette seconde date, le modèle à volatilité stochastique est toujours nettement dominé.

Le tableau 7 présente les performances des différentes méthodes en terme d'évaluation d'option en échantillon. Le critère adopté pour cette comparaison est le carré de l'erreur moyenne (MSE) des prix d'option. Dans certains cas, le classement des modèles en fonction de leur MSE peut différer de celui obtenu à partir des vraisemblances. Plus précisément, dans deux cas, l'évaluation conduit à des changements importants : pour la première date, les bons résultats obtenus par le modèle à volatilité stochastique pour les longues maturités (3 à 12 mois) ne sont plus valables et cette méthode devient la moins bonne en terme d'évaluation d'option pour la maturité 12 mois. Pour la seconde date, on observe le même phénomène, les vraisemblances élevées obtenues avec le mélange de log-normales pour les maturités élevées (6 et 12 mois) conduisent à des MSE élevées pour la maturité 12 mois.

Une explication à ces changements peut provenir de la forme des DNR. Dans le cas du modèle à volatilité stochastique, le problème provient de l'apparition d'ondelettes observées sur les queues de la densité. Ces ondelettes conduisent à des probabilités négatives. Nous avons alors imposé que les queues de distribution deviennent nulles dès qu'une probabilité a été négative. Les densités ont alors été renormées.

En ce qui concerne le mélange de densités log-normales, le problème peut être dû à l'estimation des paramètres. En effet, pour les maturités longues (6 et 12 mois), la seconde densité log-normale est éloignée, à droite de la première, avec une probabilité relativement élevée (de l'ordre de 10%). De ce fait, la densité jointe décroît très lentement, donnant des prix d'option peu cohérents.

### 4.2 Propriétés statistiques des DNR

Un autre élément de comparaison des différents modèles repose sur les propriétés statistiques des DNR, comme indiqué dans le tableau 8.

D'abord, on peut vérifier que le premier moment des DNR est en général égal au taux *forward*, avec les exceptions du mélange de densités log-normales et du modèle à volatilité stochastique, pour la seconde date, pour la maturité 12 mois. La plupart des modèles (log-normal, polynôme d'Hermite, expansion d'Edgeworth, diffusion avec saut, modèle à volatilité stochastique) imposent cette contrainte, par la définition même de la DNR. En ce qui concerne le modèle à volatilité stochastique, bien que la contrainte soit imposée dans l'équation (13), les problèmes numériques de la phase d'optimisation (l'apparition des ondelettes) expliquent cet écart. Pour le mélange de densités log-normales, la contrainte est ajoutée lors de la phase d'optimisation (cf. Bahra, 1966) et peut donc ne pas être totalement vérifiée.

De plus, on peut mesurer comment les contraintes imposées par l'hypothèse de log-normalité sur les moments d'ordre 3 et 4 peuvent conduire à biaiser l'estimation de la variance. La volatilité associée au modèle log-normal apparaît en effet systématiquement sous-évaluée par rapport à celle obtenue avec les autres approches. On observe par ailleurs une grande homogénéité des volatilités obtenues par les autres modèles.

L'estimation des skewness et des kurtosis est beaucoup plus contrastée, puisque, à ce niveau, les spécificités des différentes méthodes peuvent être observées. Le modèle log-normal est moins intéressant de ce point de vue, puisqu'il n'autorise, théoriquement, ni asymétrie ni queues épaisses. D'abord, on observe que la skewness comme la kurtosis sont généralement éloignées de celles obtenues sous hypothèse de log-normalité : pour la première date, la skewness est comprise entre 0,6 et 1,6 et l'excès de kurtosis entre 2,5 et 6 ; pour la seconde date, la skewness est comprise entre 1,3 et 2,6 et l'excès de kurtosis entre 3,5 et 9,5. La skewness et l'excès de kurtosis issus des modèles semi-paramétriques sont presque systématiquement plus faibles que ceux issus des autres modèles, même si les différences apparaissent parfois assez limitées. En ce qui concerne la kurtosis, on note en outre des différences prononcées parmi les autres méthodes : le mélange de densités log-normales et le modèle à volatilité stochastique conduisent généralement à des excès de kurtosis très élevés (surtout pour la seconde date).

Pour résumer, on note une certaine homogénéité des différents modèles en ce qui concerne les premier, second et, dans une certaine mesure, troisième moments. Les modèles qui autorisent des moments d'ordre 3 et 4 flexibles sont plus proches les uns des autres que l'approche log-normale. Cependant, l'excès de kurtosis (qui permet de rendre compte des CRI) est moins homogène et semble plus délicat à estimer (au moins pour le mélange de densités log-normales et, peut-être, pour le modèle à volatilité stochastique).

### 4.3 L'utilisation des DNR

Un point important à étudier pour la comparaison entre les différentes méthodes concerne les intervalles de confiance. Ce point est particulièrement intéressant pour une Banque centrale, puisque la largeur des intervalles de confiance peut être interprétée comme un indicateur de crédibilité de la politique monétaire. Il n'est pas possible d'extraire directement des prévisions à partir des prix d'option, puisque les distributions sous-jacentes sont fondées sur l'hypothèse de neutralité face au risque des participants au marché. Néanmoins, il est possible de construire des DNR fondées sur le taux *forward*. Dans ce cas, les intervalles de confiance ne peuvent pas être interprétés en niveau, puisqu'il serait trompeur de lire les planchers et les plafonds

d'un intervalle exprimé en FRF/DEM comme des prévisions concernant le taux de change futur. En revanche, l'analyse des intervalles relatifs et les largeurs relatives des intervalles, exprimées en pourcentage du taux *forward* paraît plus réaliste (cf. Campa *et alii*, 1997).

Nous avons donc estimé, pour chaque maturité et chaque méthode, deux intervalles de confiance : l'intervalle de largeur minimale telle que les participants au marché attribuent une probabilité de 80% (et 90%) au fait que le FRF/DEM sera dans l'intervalle à l'échéance. Comme les DNR sont centrées sur le taux *forward*, on définit l'intervalle comme la moitié de la différence entre le plancher et le plafond, exprimé en pourcentage du taux *forward*.

Le tableau 9 présente les estimations du plancher, du plafond et de l'intervalle. Plusieurs points sont importants à noter : d'abord, on observe clairement l'asymétrie des DNR pour toutes les méthodes (autres que la loi log-normale) et toutes les maturités. En effet, pour l'intervalle à 90%, le ratio taux *forward*/plafond est toujours plus petit que le ratio taux *forward*/plancher. Par exemple pour l'intervalle contenant 90% de la distribution pour le 17 mai 1996 pour l'échéance 1 mois, le premier ratio est de l'ordre de 0,85% alors que le second est de 1,4%. Pour des maturités plus éloignées, l'écart est encore plus important. En revanche, pour l'intervalle à 80%, l'écart entre les deux ratios est beaucoup plus réduit et s'inverse même, dans la plupart des cas, pour la seconde date. Cela implique une densité dont la queue est plus épaisse à droite qu'à gauche et dont la masse centrale est déplacée vers la gauche, par rapport au taux *forward*.

De plus, l'excès de kurtosis peut être également mesuré, dans une certaine mesure, à partir de l'intervalle à 90%. En effet, il apparaît clairement que l'intervalle du modèle log-normal est toujours plus étroit que pour les autres approches. Cela signifie que, pour un intervalle exprimé en FRF/DEM donné, les méthodes plus sophistiquées (qui autorisent des queues plus épaisses que la loi log-normale) attribueront une probabilité plus élevée pour l'extérieur de l'intervalle que le modèle log-normal.

La comparaison des différentes méthodes est également intéressante. Le modèle log-normal ne met en évidence aucune asymétrie, puisque les ratios taux *forward*/plancher et taux *forward*/plafond sont à peu près identiques. Les autres approches sont beaucoup plus homogènes, à l'exception peut-être du modèle à volatilité stochastique. En effet, ce modèle apparaît moins asymétrique que les autres. Plus précisément, dans de nombreux cas, le plafond est plus proche du taux *forward*. Ce résultat peut s'expliquer par le fait que le modèle à volatilité stochastique n'est pas capable d'engendrer des bosses (comme l'autorise le modèle de diffusion avec saut) et donc doit compenser ce manque de flexibilité par une densité décroissant moins rapidement. On note par exemple pour la maturité 3 mois pour le 25 avril 1997 un écart important entre les intervalles de confiance évalués par le modèle à volatilité stochastique et par les autres approches : l'intervalle contenant 90% de la distribution est de 1,74-2,75 pour le modèle à volatilité stochastique et de l'ordre de 1,7-3,9 pour les autres modèles (1,7-3,1 pour le mélange de densités log-normales).

## 5 Conclusion

Dans ce papier, nous mettons en œuvre différentes méthodes d'extraction de DNR, qui peuvent être aussi bien non-paramétriques que semi-paramétriques ou paramétriques. Pour deux dates, nous appliquons ces méthodes à des données d'options de change

cotées au gré à gré.

L'estimation de densités fondées sur un mélange de densités log-normales permet en général une très bonne évaluation des prix d'option en échantillon. L'interprétation de ce modèle est toutefois délicate. Un modèle paramétrique tel que celui proposé par Malz, qui autorise l'occurrence d'un saut d'ampleur donnée avant l'échéance de l'option, conduit non seulement à une bonne évaluation des prix d'option mais donne de plus des paramètres aisés à interpréter.

Nous montrons que l'utilisation d'options pour différentes maturités nous permet de mettre en évidence une structure par terme des volatilités en plus de l'habituel *smile* d'option. La première date, le 17 mai 1996, a été choisie de façon aléatoire. Pour cette date, nous montrons que les participants au marché distinguent le court terme et le long terme : les événements qui seraient considérés comme importants à court terme deviendraient normaux à long terme. En outre, pour cette date, il apparaît exister plus d'incertitude à long terme qu'à court terme.

D'autre part, nous considérons le 25 avril 1997, quelques jours après l'annonce de la dissolution de l'Assemblée Nationale par le Président Chirac. On montre que les participants au marché considéraient la possibilité d'une dévaluation mais qu'ils s'attendaient à ce que les choses redeviennent normales à long terme.

## Références

- Abken, P., D.B. Madan et S. Ramamurtie (1996), Estimation of risk-neutral and statistical densities by Hermite polynomial approximation: With an application to Eurodollar Futures Options, Federal Reserve Bank of Atlanta, mimeo.
- Aït-Sahalia, Y., et A.W. Lo (1995), Nonparametric estimation of state-price densities implicit in financial asset prices, NBER working paper 5351, en cours de publication dans le *Journal of International Money and Finance*.
- Bahra, B., (1996), Probability distributions of future asset prices implied by option prices, *Bank of England Quarterly Bulletin: August 1996*, 299–311.
- Ball, C.A., et A. Roma (1994), Stochastic volatility option pricing, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29(4), 589–607.
- Ball, C.A., et W.N. Torous (1983), A simplified jump process for common stock returns, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18(1), 53-65.
- Ball, C.A., et W.N. Torous (1985), On jumps in common stock prices and their impact on call option pricing, *Journal of Finance*, 40(1), 155-173.
- Bates, D.S., (1991), The Crash of '87: Was it expected? The evidence from options markets, *Journal of Finance*, 46(3), 1009–1044.
- Bates, D.S., (1996a), Dollar jump fears, 1984:1992, Distributional abnormalities implicit in currency futures options, *Journal of International Money and Finance*, 15(1), 65–93.
- Bates, D.S., (1996b), Jumps and stochastic volatility: exchange rate processes implicit in Deutsche Mark options, *Review of Financial Studies*, 9(1), 69–107.

- Black, F., et M. Scholes (1973), The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654.
- Breeden, D.T., et R.H. Litzenberger (1978), Prices of state-contingent claims implicit in option prices, *Journal of Business*, 51(4), 621–651.
- Campa, J.C., P.H.K. Chang et R.L. Reider (1997), ERM bandwidths for EMU and after: evidence from foreign exchange options, *Economic Policy*, 24, 55–87.
- Chesney, M., et L. Scott (1989), Pricing European currency options: a comparison of the modified Black-Scholes and a random variance model, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24(3), 267–284.
- Corrado, C.J., et T. Su (1996), S&P 500 index option tests of Jarrow and Rudd's approximate option valuation formula, *Journal of Futures Markets*, 16(6), 611–629.
- Cox, J.C., et S.A. Ross (1976), The valuation of options for alternative stochastic processes, *Journal of Financial Economics*, 3(1/2), 145–166.
- Derman, E., et I. Kani (1994), Riding on a smile, *RISK*, 7, 32–39.
- Duffie, D., (1988), Security Markets: Stochastic Models, *Academic Press*, Boston.
- Dumas, B., J. Fleming and R.E. Whaley (1996), Implied volatility functions: empirical tests, HEC School of management, mimeo.
- Dupire, B., (1994), Pricing with a Smile, *RISK*, 7, 18–20.
- Garman, M., et S. Kohlhagen (1983), Foreign currency option values, *Journal of International Money and Finance*, 2(3), 231–237.
- Gesser, V., et P. Poncet (1996), Volatility patterns: theory and evidence from the foreign exchange option market, mimeo.
- Harrison, J.M., et S. Pliska (1981), Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading, *Stochastic Processes and their Applications*, 11, 215–260.
- Heston, S.L., (1993), A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *Review of Financial Studies*, 6(2), 327–343.
- Hull, J.C., et A.D. White (1987), The pricing of options on assets with stochastic volatilities, *Journal of Finance*, 42(2), 281–300.
- Jackwerth, J.C., et M. Rubinstein (1996), Recovering probability distributions from option prices, *Journal of Finance*, 51(5), 1611–1632.
- Jarrow, R., et A. Rudd (1982), Approximate valuation for arbitrary stochastic processes, *Journal of Financial Economics*, 10(3), 349–369.
- Jorion, P., (1988), On jump processes in the foreign exchange and stock markets, *Review of Financial Studies*, 1, 431–445.
- Madan, D.B., et F. Milne (1994), Contingent claims valued and hedged by pricing and investing in a basis, *Mathematical Finance*, 4, 223–245.
- Malz, A.M., (1996), Options-based estimates of the probability distribution of exchange rates and currency excess returns, Federal Reserve Bank of New York, mimeo.
- Malz, A.M., (1997), Using option prices to estimate realignment probabilities in the

- European monetary system, *Journal of International Money and Finance*, forthcoming.
- Melick, W.R., et C.P. Thomas (1997), Recovering an asset's implied PDF from options prices: an application to crude oil during the Gulf crisis, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32, 91–116.
- Melino, A., et S.M. Turnbull (1990), Pricing foreign currency options with stochastic volatility, *Journal of Econometrics*, 45(1/2), 239–265.
- Merton, R.C., (1973), Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 141–183.
- Roncalli, T., (1997), Quelques applications de GAUSS en Finance. Site Internet de l'Université de Bordeaux.
- Rubinstein, M., (1994), Implied binomial trees, *Journal of Finance*, 49(3), 771–818.
- Rzepkowski, B., (1996), La densité de probabilité risque-neutre du taux de change futur : un indicateur pour la politique monétaire, Banque de France, mimeo.
- Sherrick B.J., P. Garcia et V. Tirupattur (1996), Recovering probabilistic information from option markets: tests of distributional assumptions, *Journal of Futures Markets*, 16(5), 545–560.
- Shimko, D., (1993), Bounds of probability, *RISK*, 6, 33–47.
- Söderlind P., et L.E.O. Svensson (1997), New techniques to extract market expectations from financial instruments, CEPR Discussion Paper 1556, January.
- Stein, E.M., et J.C. Stein (1991), Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach, *Review of Financial Studies*, 4(4), 727–752.
- Stutzer, M. (1996), A Simple Nonparametric Approach to Derivative Security Valuation, *Journal of Finance*, 101(5), 1633-1652.

## ANNEXE A

Les données OTC que nous avons utilisées proviennent d'une grande banque française. Les options sont issues sur une base régulière, pour des maturités de quelques jours à une année. Les participants au marché considèrent que ce marché est suffisamment liquide.

Pour la première date, nous disposons d'information sur les options pour des  $\delta$  valant 5, 10, 15, 20, 30, 40, 50 (correspondant approximativement à l'option à la monnaie), 60, 70, 80, 85, 90, 95. Nous avons étudié les options d'échéance 1, 2, 3, 6, 9 et 12 mois. Pour la seconde date, nous n'avons pas disposé des prix d'option pour les  $\delta$  de 5 et 95. Bien que la qualité des options de  $\delta$  élevé puisse être moins bonne que celle des options de  $\delta$  central (du fait d'une liquidité moindre, par exemple), nous avons utilisé le plus d'options possible. Nous avons travaillé sur la moyenne des cours offerts et demandés, de façon à réduire les erreurs dues à une absence de simultanéité entre les horaires d'évaluation des options et du sous-jacent.

Les taux d'intérêt  $r$  et  $r^*$  sont les euro-taux domestique (français) et étranger (allemand), choisis pour correspondre à l'échéance des options. Ces taux ont été transformés en leur équivalent composé continûment. Les taux de change au comptant sont aisément disponibles.

Les prix d'exercice ont été extraits selon la méthodologie présentée dans le corps du texte. La différence entre les données observées et les deltas obtenus pour le prix optimal  $K$  est, dans tous les cas, inférieure à 0,07% du delta initial.

## ANNEXE B

Pour une date donnée, disposant de  $N$  prix d'exercice  $K_i$  pour une maturité  $T$ , nous connaissons le prix du marché  $C_{iT}^M$ . Soit  $\Theta$  le vecteur des paramètres résumant les paramètres décrits dans la DNR, si on note  $C_{iT}^X(\Theta)$  le prix théorique obtenu pour le modèle  $X$ , alors on considère  $C_{iT}^M = C_{iT}^X(\Theta) + u_{iT}$  où  $i = 1, \dots, N$ .

Nous avons estimé les paramètres  $\Theta$  soit par moindres carrés non linéaires (MCNL) soit par maximisation de la vraisemblance, après imposition de l'hypothèse supplémentaire  $u_{iT} \sim \mathcal{N}(0, s_T^2)$ . Dans tous les cas considérés, MCNL calcule les estimations plus rapidement et plus aisément. Nous avons estimé les paramètres pour différents jeux de conditions initiales. L'estimation par maximum de vraisemblance permet d'obtenir des écarts-types pour les paramètres. Dans certains cas, compte tenu du nombre élevé de paramètres à estimer et du relativement faible nombre de prix d'exercice, nous n'avons pu utiliser que les MCNL. Dans ces cas, nous présentons uniquement les vraisemblances calculées pour les estimations par MCNL.

Tableau 1 : Estimation du modèle log-normal (équation (4))

	1 mois	3 mois	6 mois	12 mois
17 mai 96				
$\sigma$	0,0208	0,0234	0,0254	0,0271
SE( $\sigma$ )	0,0007	0,0009	0,0010	0,0010
log-vrais.	5,943	5,077	4,679	4,317
25 avril 97				
$\sigma$	0,0265	0,0256	0,0242	0,0247
SE( $\sigma$ )	0,0015	0,0017	0,0018	0,0018
log-vrais.	5,163	4,511	4,132	3,791

**Note** : SE( $\sigma$ ) est l'écart-type associé au paramètre  $\sigma$ .

Tableau 2 : Estimation du mélange de densités log-normales (équation (6))

	1 mois		3 mois		6 mois		12 mois	
17 mai 96	$i=1$	2	1	2	1	2	1	2
$\alpha_i$	0,7630	0,2370	0,7926	0,2074	0,7215	0,2785	0,7647	0,2353
$\mu_i$	1,2198	1,2237	1,2188	1,2323	1,2195	1,2356	1,2196	1,2498
$\sigma_i$	0,0037	0,0115	0,0075	0,0208	0,0103	0,0300	0,0175	0,0439
log-vrais.	8,413		7,001		6,960		6,604	
$\mu_2 - \mu_1$	0,0039		0,0135		0,0161		0,0302	
25 avril 97	$i=1$	2	1	2	1	2	1	2
$\alpha_i$	0,8253	0,1747	0,8743	0,1257	0,8954	0,1046	0,8999	0,1001
$\mu_i$	1,2141	1,2259	1,2133	1,2395	1,2129	1,2578	1,2125	1,2771
$\sigma_i$	0,0047	0,0151	0,0079	0,0294	0,0105	0,0381	0,0155	0,0571
log-vrais.	8,229		7,362		6,942		6,569	
$\mu_2 - \mu_1$	0,0118		0,0262		0,0449		0,0646	



Tableau 3 : Estimation du modèle avec polynômes d’Hermite (équation (8))

	1 mois	3 mois	6 mois	12 mois
17 mai 96				
$\sigma$	0,0229	0,0256	0,0276	0,0289
SE( $\sigma$ )	0,0001	0,0003	0,0002	0,0002
$\pi_3$	0,2753	0,4128	0,3972	0,4058
SE( $\pi_3$ )	0,0107	0,0254	0,0194	0,0184
$\pi_4$	0,6509	0,5643	0,5593	0,4727
SE( $\pi_4$ )	0,0228	0,0549	0,0405	0,0380
log-vrais.	8,291	6,794	6,636	6,314
25 avril 97				
$\sigma$	0,0301	0,0303	0,0291	0,0296
SE( $\sigma$ )	0,0002	0,0003	0,0005	0,0004
$\pi_3$	0,5382	0,5820	0,6417	0,6170
SE( $\pi_3$ )	0,0148	0,0266	0,0411	0,0381
$\pi_4$	0,7060	0,8982	0,9724	0,9866
SE( $\pi_4$ )	0,0313	0,0535	0,0805	0,0743
log-vrais.	7,865	6,776	6,070	5,752

Tableau 4 : Estimation du modèle avec expansions d’Edgeworth (équation (11))

	1 mois	3 mois	6 mois	12 mois
17 mai 96				
$\sigma$	0,0230	0,0258	0,0280	0,0295
SE( $\sigma$ )	0,0001	0,0003	0,0002	0,0002
$\gamma_1$	0,6834	1,0215	0,9894	1,0225
SE( $\gamma_1$ )	0,0263	0,0591	0,0441	0,0422
$\gamma_2$	3,2551	2,9591	3,0174	2,7028
SE( $\gamma_2$ )	0,1131	0,2619	0,1908	0,1810
log-vrais.	8,289	6,840	6,709	6,386
25 avril 97				
$\sigma$	0,0304	0,0309	0,0301	0,0310
SE( $\sigma$ )	0,0002	0,0003	0,0005	0,0005
$\gamma_1$	1,3080	1,3828	1,4899	1,3827
SE( $\gamma_1$ )	0,0352	0,0641	0,0983	0,0913
$\gamma_2$	3,6581	4,8023	5,3694	5,7019
SE( $\gamma_2$ )	0,1514	0,2637	0,3926	0,3660
log-vrais.	7,905	6,822	6,152	5,870

Tableau 5 : Estimation du modèle de diffusion avec saut (équation (12))

	1 mois	3 mois	6 mois	12 mois
17 mai 96				
$\sigma$	0,0172	0,0178	0,0193	0,0205
SE( $\sigma$ )	0,0001	0,0006	0,0005	0,0005
$\lambda$	0,4855	0,2520	0,1328	0,0700
SE( $\lambda$ )	0,2891	0,0613	0,0383	0,0115
$k$	0,0214	0,0379	0,0563	0,0826
SE( $k$ )	0,0060	0,0045	0,0091	0,0057
log-vrais.	7,081	6,742	6,421	6,305
$\lambda T$	0,0405	0,0630	0,0664	0,0700
$\lambda k T$	0,0009	0,0024	0,0037	0,0058
$\sqrt{\sigma^2 + k^2 \lambda}$	0,0228	0,0261	0,0282	0,0300
25 avril 97				
$\sigma$	0,0186	0,0176	0,0160	0,0165
SE( $\sigma$ )	0,0003	0,0004	0,0003	0,0003
$\lambda$	0,8723	0,2466	0,1215	0,0574
SE( $\lambda$ )	0,1218	0,0257	0,0075	0,0055
$k$	0,0264	0,0520	0,0743	0,1105
SE( $k$ )	0,0023	0,0031	0,0026	0,0059
log-vrais.	7,924	7,170	6,736	6,412
$\lambda T$	0,0717	0,0608	0,0608	0,0574
$\lambda k T$	0,0019	0,0032	0,0045	0,0063
$\sqrt{\sigma^2 + k^2 \lambda}$	0,0309	0,0313	0,0304	0,0312

Tableau 6 : Estimation du modèle à volatilité stochastique (équation (13))

	1 mois	3 mois	6 mois	12 mois
17 mai 96				
$\kappa^*$	3,2556	3,3955	3,4761	3,9333
$\sqrt{\psi^*}$	0,0264	0,0390	0,0334	0,0049
$\gamma$	0,1561	0,1404	0,1408	0,1202
$\rho$	0,4497	0,5718	0,5275	0,5562
$\sqrt{v_t}$	0,0220	0,0158	0,0200	0,0580
log-vrais.	7,147	6,941	6,705	7,246
25 avril 97				
$\kappa^*$	3,2393	3,3600	3,4266	3,8679
$\sqrt{\psi^*}$	0,0829	0,0497	0,0198	0,0039
$\gamma$	0,2921	0,2013	0,1343	0,1394
$\rho$	0,6427	0,6350	0,6289	0,6494
$\sqrt{v_t}$	0,0091	0,0120	0,0358	0,0590
log-vrais.	6,560	5,644	5,187	5,089

Tableau 7 : MSE pour les prix d'option

(x10 <sup>-6</sup> )	1 mois	3 mois	6 mois	12 mois
17 mai 96				
log-normale	0,404	2,278	5,048	10,429
mélange de log-normales	0,003	0,049	0,052	0,111
polynômes d'Hermite	0,004	0,072	0,097	0,177
expansion d'Edgeworth	0,004	0,067	0,087	0,166
diffusion avec saut	0,042	0,082	0,155	0,196
volatilité stochastique	0,026	0,041	0,053	0,410
25 avril 97				
log-normale	1,917	7,073	15,078	29,814
mélange de log-normales	0,004	0,024	0,055	2,948
polynômes d'Hermite	0,009	0,075	0,302	0,550
expansion d'Edgeworth	0,008	0,069	0,265	0,467
diffusion avec saut	0,008	0,035	0,083	0,158
volatilité stochastique	0,071	0,516	1,231	3,664

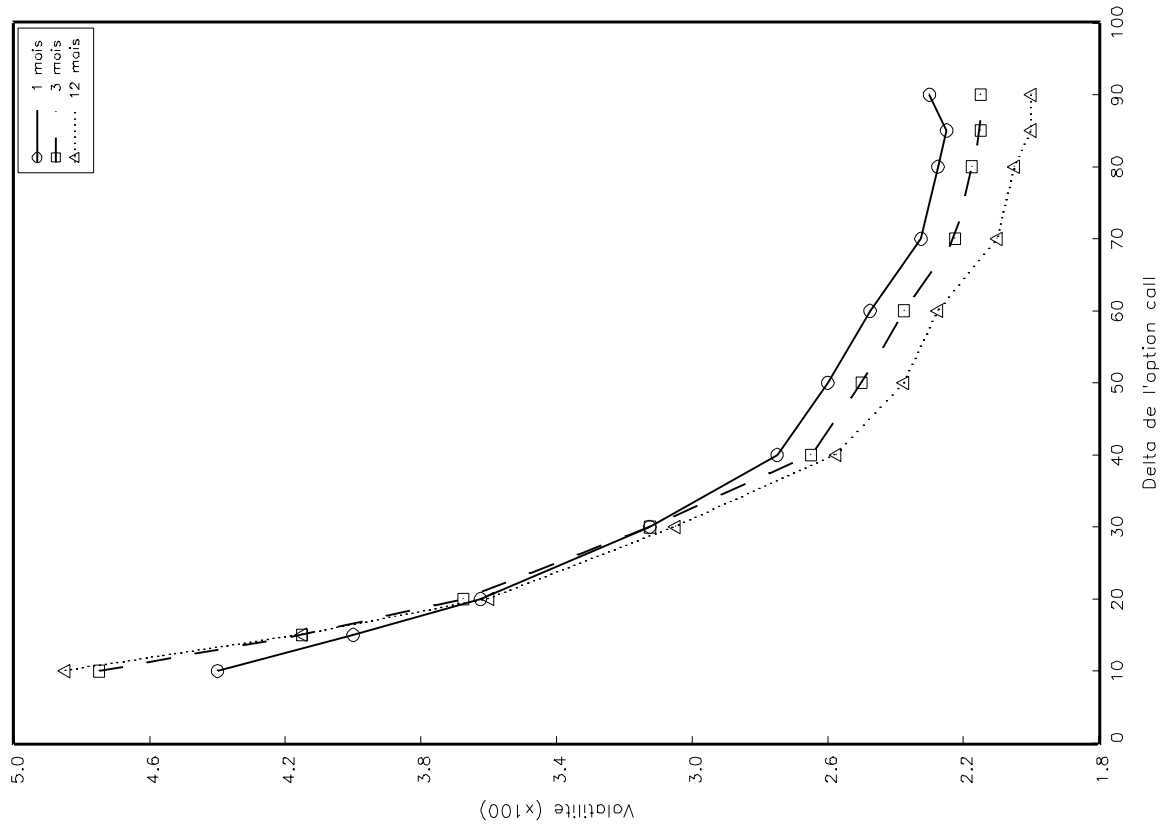
Tableau 8 : Moments des densités neutres au risque

17 mai 96	forward	volatilité	skewness	kurtosis
<b>1 mois</b>				
log-normale	3,3896	0,0202	0,0179	0,0006
mélange de log-normales	3,3896	0,0226	0,9374	4,5972
polynômes d'Hermite	3,3896	0,0223	0,7209	3,2169
expansion d'Edgeworth	3,3896	0,0224	0,6834	3,2551
diffusion avec saut	3,3896	0,0219	1,2932	3,5952
volatilité stochastique	3,3897	0,0220	1,2339	4,5298
<b>3 mois</b>				
log-normale	3,3929	0,0394	0,0348	0,0022
mélange de log-normales	3,3929	0,0438	1,3785	4,2836
polynômes d'Hermite	3,3929	0,0434	1,0819	2,8556
expansion d'Edgeworth	3,3929	0,0435	1,0215	2,9591
diffusion avec saut	3,3929	0,0431	1,3714	3,0689
volatilité stochastique	3,3931	0,0435	1,5913	5,9199
<b>12 mois</b>				
log-normale	3,4121	0,0925	0,0813	0,0118
mélange de log-normales	3,4120	0,1010	1,3064	3,4968
polynômes d'Hermite	3,4121	0,1002	1,1371	2,5620
expansion d'Edgeworth	3,4121	0,1007	1,0224	2,7025
diffusion avec saut	3,4120	0,1000	1,2979	2,6721
volatilité stochastique	3,4122	0,0986	1,5000	4,4893
<hr/>				
25 avril 97	forward	volatilité	skewness	kurtosis
<b>1 mois</b>				
log-normale	3,3743	0,0257	0,0228	0,0009
mélange de log-normales	3,3743	0,0300	1,8553	6,0629
polynômes d'Hermite	3,3743	0,0293	1,3661	3,5205
expansion d'Edgeworth	3,3743	0,0294	1,3080	3,6581
diffusion avec saut	3,3743	0,0291	1,6362	3,5318
volatilité stochastique	3,3743	0,0293	1,7996	6,8108
<b>3 mois</b>				
log-normale	3,3761	0,0430	0,0382	0,0026
mélange de log-normales	3,3761	0,0531	2,4013	9,4988
polynômes d'Hermite	3,3761	0,0513	1,5220	4,4829
expansion d'Edgeworth	3,3761	0,0518	1,3828	4,8023
diffusion avec saut	3,3761	0,0512	2,0354	5,2717
volatilité stochastique	3,3762	0,0503	2,0315	8,6230
<b>12 mois</b>				
log-normale	3,3852	0,0836	0,0741	0,0098
mélange de log-normales	3,3833	0,1004	2,5163	9,2360
polynômes d'Hermite	3,3853	0,1025	1,7049	4,9914
expansion d'Edgeworth	3,3853	0,1050	1,3878	5,6918
diffusion avec saut	3,3853	0,1029	2,2999	6,4617
volatilité stochastique	3,3838	0,0971	1,7701	5,5073

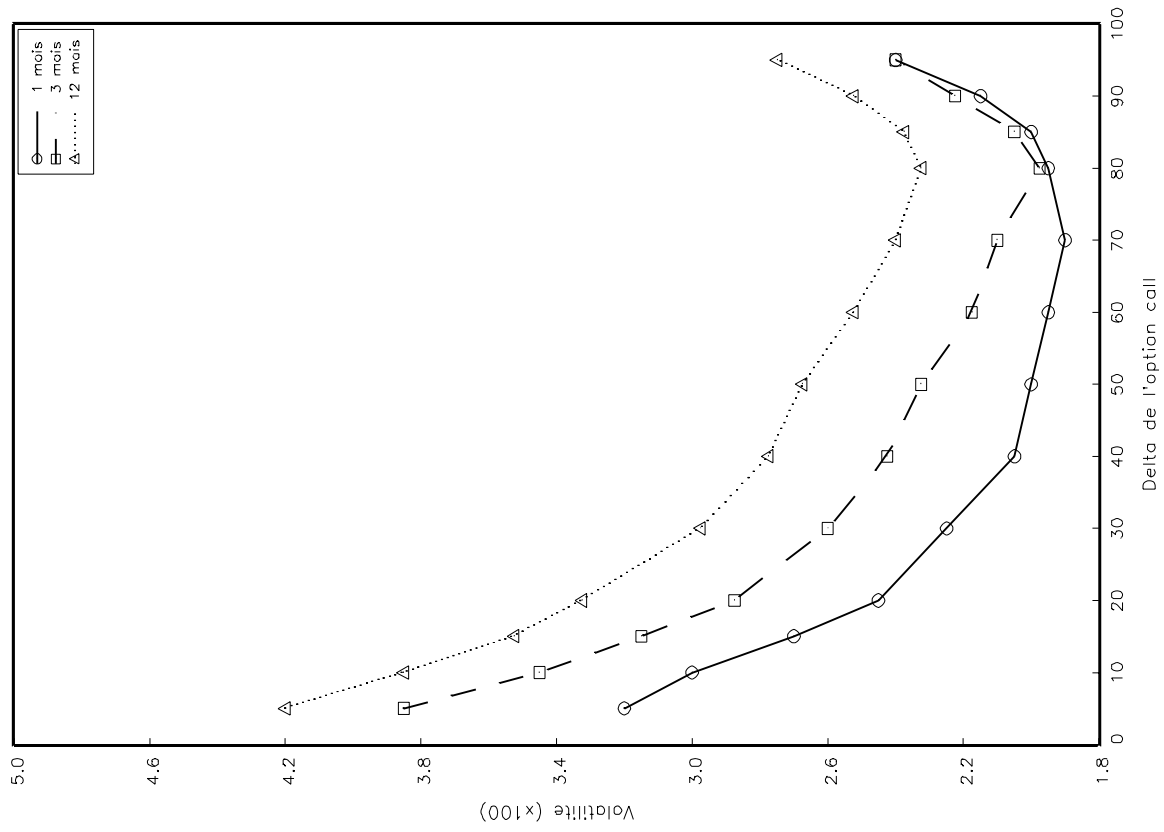
Tableau 9 : Intervalles de confiance à 80% et 90%

17 mai 96	intervalle à 80%			intervalle à 90%		
	<i>forw./</i> planch.	plaf./ <i>forw.</i>	interv.	<i>forw./</i> planch.	plaf./ <i>forw.</i>	interv.
<b>1 mois</b>						
log-normale	0,7596	0,7763	0,7651	0,9820	0,9948	0,9837
mélange de log-norm.	0,6488	0,6670	0,6558	0,8707	1,2134	1,0383
polynômes d'Hermite	0,6488	0,6305	0,6376	0,8336	1,4320	1,1294
expansion d'Edgeworth	0,6488	0,6305	0,6376	0,8336	1,4320	1,1294
diffusion avec saut	0,7226	0,6670	0,6922	0,9078	1,0313	0,9654
volatilité stochastique	0,6488	0,7763	0,7104	0,8707	1,2134	1,0383
<b>3 mois</b>						
log-normale	1,4904	1,4796	1,4741	1,9423	1,9164	1,9108
mélange de log-norm.	1,3033	1,4068	1,3467	1,6406	2,5715	2,0928
polynômes d'Hermite	1,3033	1,2976	1,2921	1,6030	2,8991	2,2384
expansion d'Edgeworth	1,3033	1,3340	1,3103	1,6030	2,8991	2,2384
diffusion avec saut	1,3406	1,2976	1,3103	1,6782	2,7899	2,2202
volatilité stochastique	1,2659	1,5160	1,3831	1,6030	2,3895	1,9836
<b>12 mois</b>						
log-normale	3,5550	3,4797	3,4563	4,6136	4,5293	4,4697
mélange de log-norm.	3,0914	3,4797	3,2392	3,8664	5,9408	4,8316
polynômes d'Hermite	3,1298	3,2626	3,1487	3,8664	6,5560	5,1393
expansion d'Edgeworth	3,0529	3,4073	3,1849	3,7494	6,4837	5,0488
diffusion avec saut	3,2069	3,1902	3,1487	3,9837	6,4113	5,1212
volatilité stochastique	2,9377	3,4797	3,1668	3,7105	5,3979	4,4878
<b>25 avril 97</b>						
	<i>forw./</i> planch.	plaf./ <i>forw.</i>	interv.	<i>forw./</i> planch.	plaf./ <i>forw.</i>	interv.
<b>1 mois</b>						
log-normale	0,9727	0,9874	0,9753	1,2770	1,2519	1,2564
mélange de log-norm.	0,8044	0,8882	0,8431	1,0401	1,8470	1,4382
polynômes d'Hermite	0,8380	0,7559	0,7935	1,0064	2,1445	1,5705
expansion d'Edgeworth	0,8380	0,7559	0,7935	1,0064	2,1445	1,5705
diffusion avec saut	0,8380	0,8221	0,8266	1,0401	2,1776	1,6035
volatilité stochastique	0,8044	1,0204	0,9092	1,0401	1,6155	1,3225
<b>3 mois</b>						
log-normale	1,6386	1,6261	1,6192	2,1188	2,1218	2,0983
mélange de log-norm.	1,3663	1,2626	1,3052	1,7069	3,0801	2,3792
polynômes d'Hermite	1,3663	1,0644	1,2061	1,6386	3,9062	2,7592
expansion d'Edgeworth	1,3663	1,0974	1,2226	1,6045	3,9062	2,7427
diffusion avec saut	1,4002	1,1966	1,2887	1,7411	4,0383	2,8748
volatilité stochastique	1,3663	1,6922	1,5200	1,7411	2,7496	2,2305
<b>12 mois</b>						
log-normale	3,2300	3,1985	3,1637	4,1870	4,1212	4,0700
mélange de log-norm.	2,7059	2,2428	2,4387	3,3003	5,9337	4,5643
polynômes d'Hermite	2,6712	2,9132	2,2574	3,1949	8,0099	5,5530
expansion d'Edgeworth	2,6017	1,9791	2,2574	3,0197	8,0429	5,4870
diffusion avec saut	2,7407	2,1768	2,4222	3,3707	8,2736	5,7672
volatilité stochastique	2,7755	3,3303	3,0154	3,4412	5,4065	4,3666

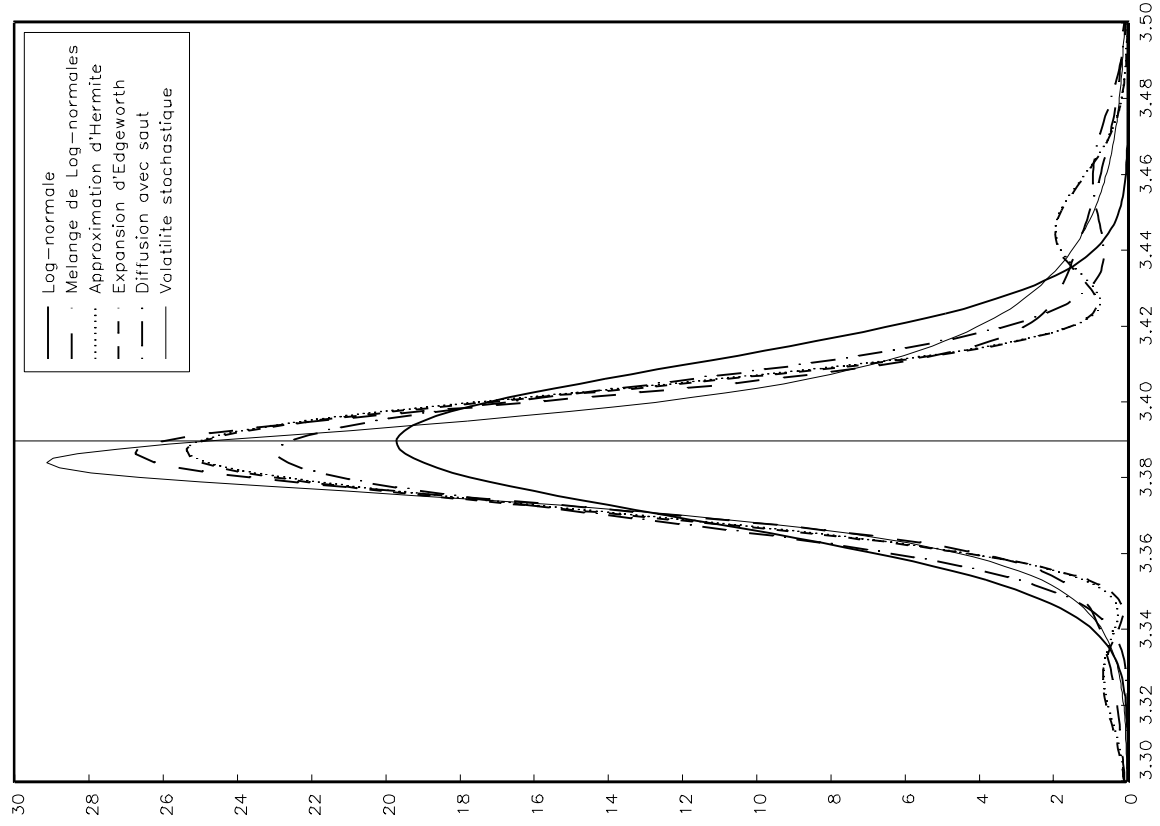
Graphique 1b : Smiles de volatilité  
25 avril 1997



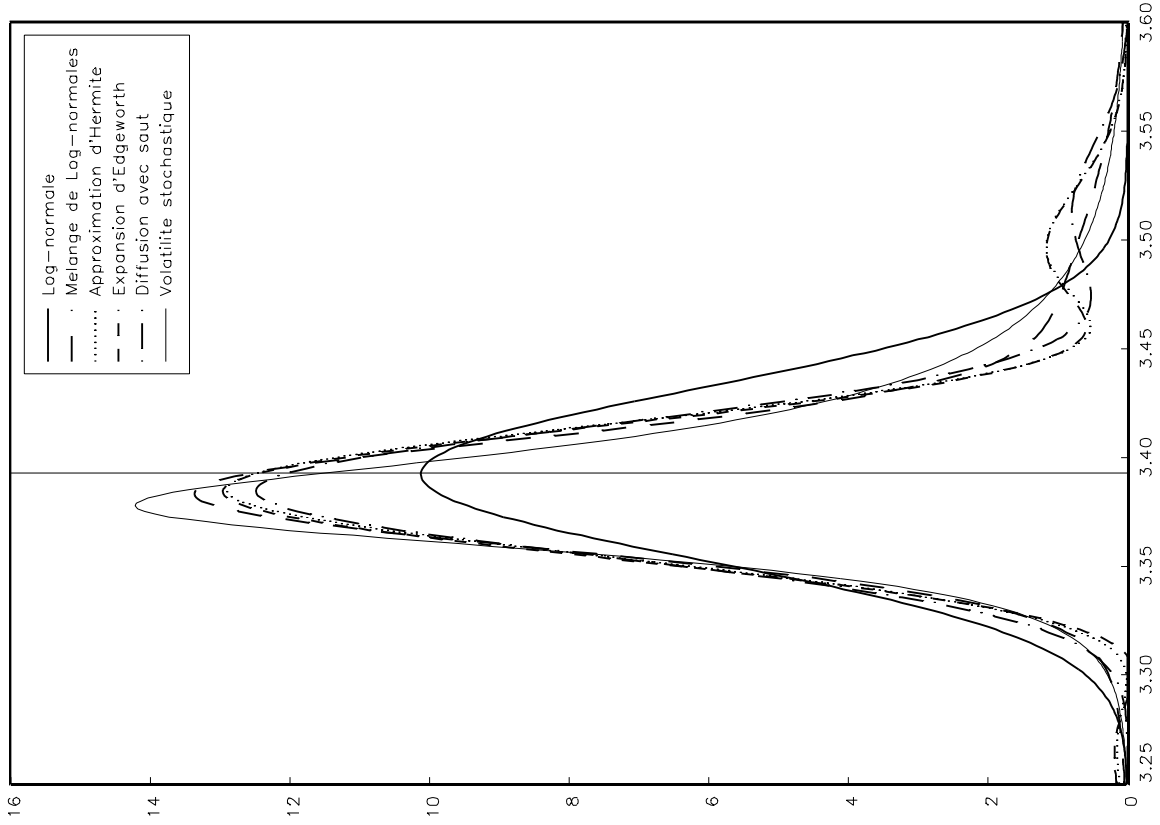
Graphique 1a : Smiles de volatilité  
17 mai 1996



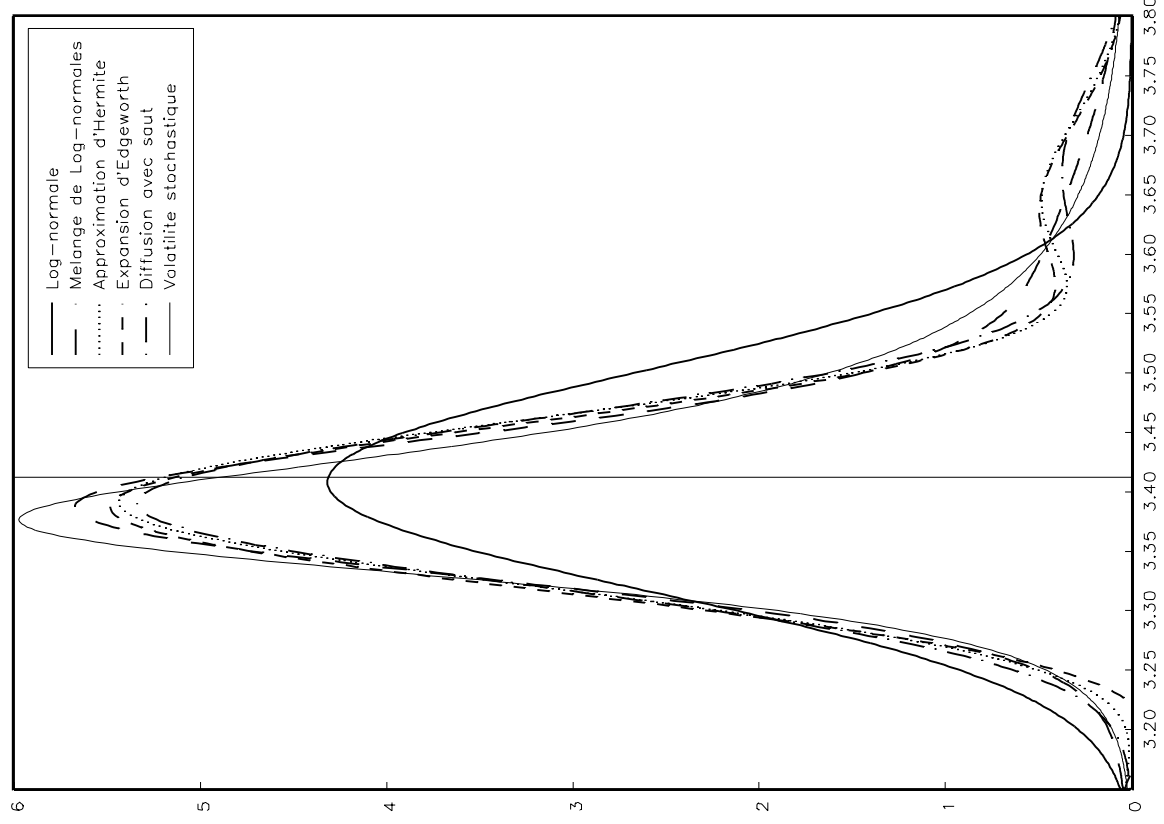
Graphique 2a : Fonction de densité pour la maturité 1 mois  
17 mai 1996



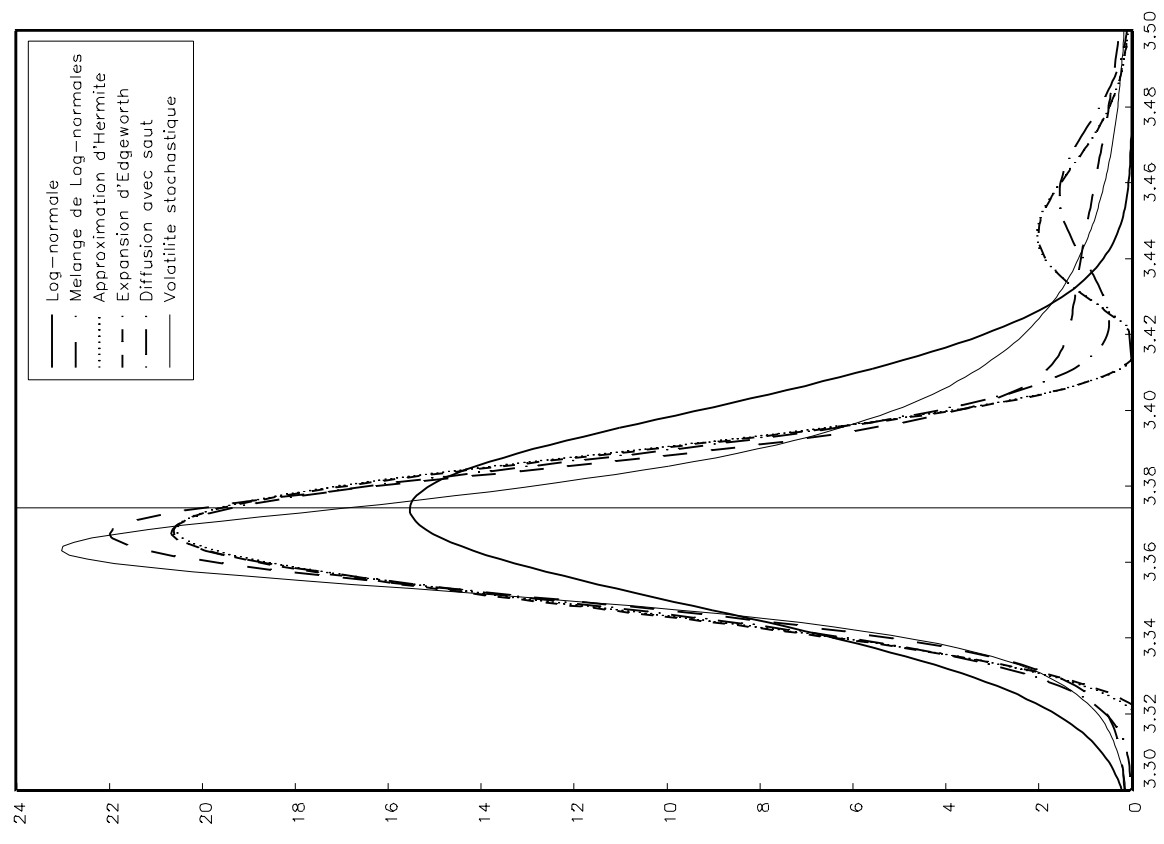
Graphique 2b : Fonction de densité pour la maturité 3 mois  
17 mai 1996



Graphique 2c : Fonction de densite pour la maturite 12 mois  
17 mai 1996

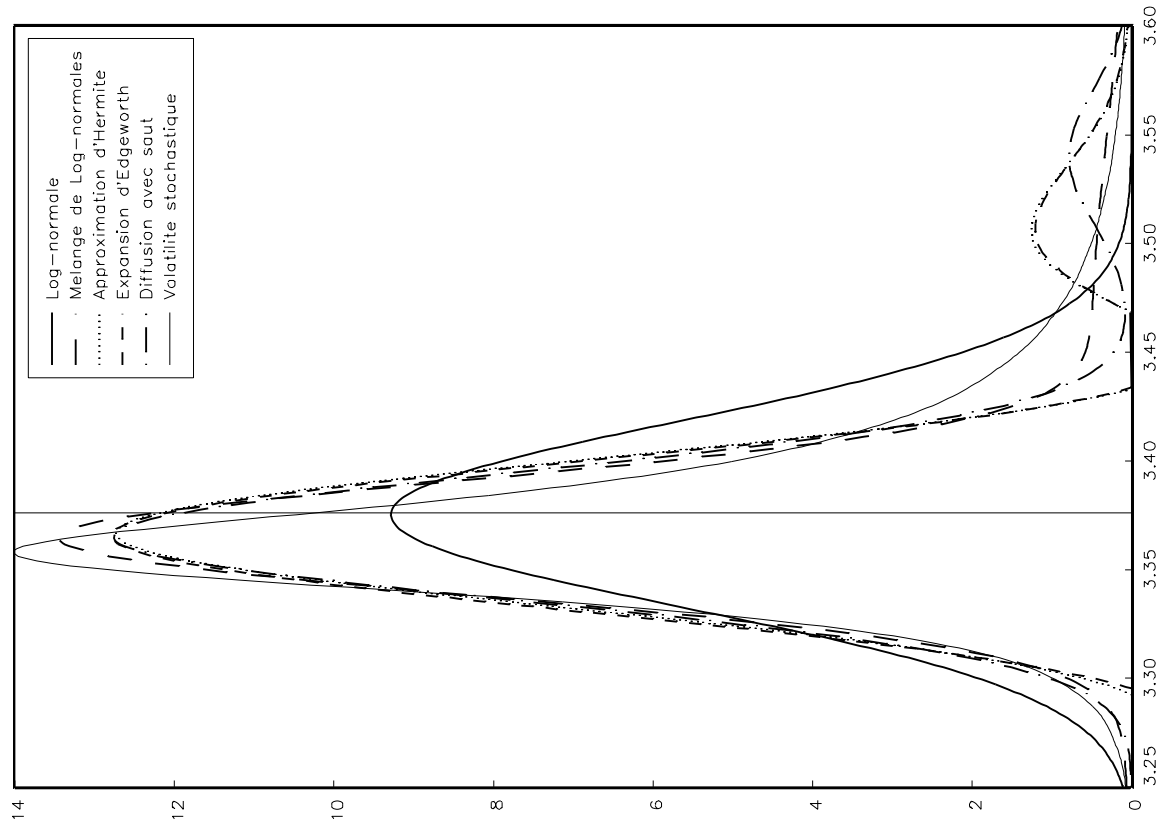


Graphique 2d : Fonction de densite pour la maturite 1 mois  
25 avril 1997

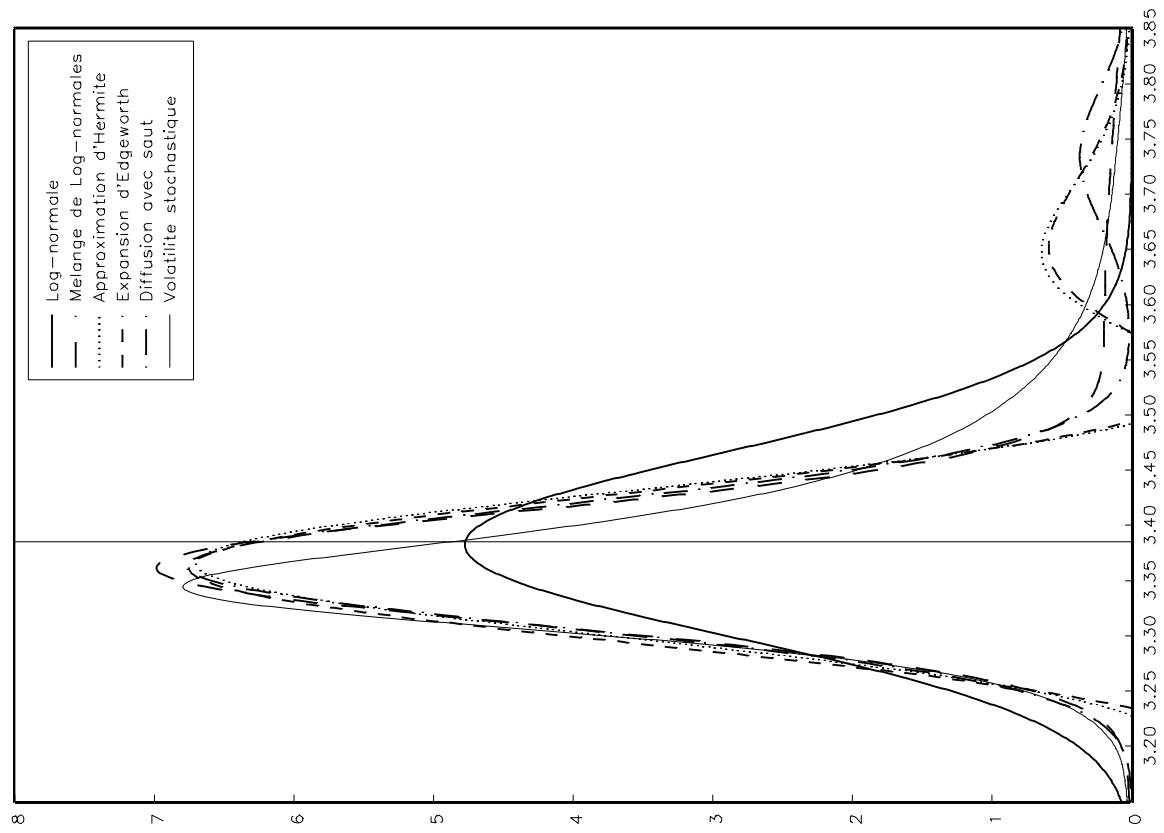




Graphique 2e : Fonction de densite pour la maturite 3 mois  
25 avril 1997



Graphique 2f : Fonction de densite pour la maturite 12 mois  
25 avril 1997



## Notes d'Études et de Recherche

1. C. Huang and H. Pagès, "Optimal Consumption and Portfolio Policies with an Infinite Horizon: Existence and Convergence," May 1990.
2. C. Bordes, « Variabilité de la vitesse et volatilité de la croissance monétaire : le cas français », février 1989.
3. C. Bordes, M. Driscoll and A. Sauviat, "Interpreting the Money-Output Correlation: Money-Real or Real-Real?," May 1989.
4. C. Bordes, D. Goyeau et A. Sauviat, « Taux d'intérêt, marge et rentabilité bancaires : le cas des pays de l'OCDE », mai 1989.
5. B. Bensaïd, S. Federbusch et R. Gary-Bobo, « Sur quelques propriétés stratégiques de l'intéressement des salariés dans l'industrie », juin 1989.
6. O. De Bandt, « L'identification des chocs monétaires et financiers en France : une étude empirique », juin 1990.
7. M. Boutillier et S. Dérangère, « Le taux de crédit accordé aux entreprises françaises : coûts opératoires des banques et prime de risque de défaut », juin 1990.
8. M. Boutillier and B. Cabrillac, "Foreign Exchange Markets: Efficiency and Hierarchy," October 1990.
9. O. De Bandt et P. Jacquinot, « Les choix de financement des entreprises en France : une modélisation économétrique », octobre 1990 (English version also available on request).
10. B. Bensaïd and R. Gary-Bobo, "On Renegotiation of Profit-Sharing Contracts in Industry," July 1989 (English version of NER n° 5).
11. P. G. Garella and Y. Richelle, "Cartel Formation and the Selection of Firms," December 1990.
12. H. Pagès and H. He, "Consumption and Portfolio Decisions with Labor Income and Borrowing Constraints," August 1990.
13. P. Sicsic, « Le franc Poincaré a-t-il été délibérément sous-évalué ? », octobre 1991.
14. B. Bensaïd and R. Gary-Bobo, "On the Commitment Value of Contracts under Renegotiation Constraints," January 1990 revised November 1990.
15. B. Bensaïd, J.-P. Lesne, H. Pagès and J. Scheinkman, "Derivative Asset Pricing with Transaction Costs," May 1991 revised November 1991.
16. C. Monticelli and M.-O. Strauss-Kahn, "European Integration and the Demand for Broad Money," December 1991.
17. J. Henry and M. Phelipot, "The High and Low-Risk Asset Demand of French Households: A Multivariate Analysis," November 1991 revised June 1992.
18. B. Bensaïd and P. Garella, "Financing Takeovers under Asymmetric Information," September 1992.

19. A. de Palma and M. Uctum, "Financial Intermediation under Financial Integration and Deregulation," September 1992.
20. A. de Palma, L. Leruth and P. Régibeau, "Partial Compatibility with Network Externalities and Double Purchase," August 1992.
21. A. Frachot, D. Janci and V. Lacoste, "Factor Analysis of the Term Structure: a Probabilistic Approach," November 1992.
22. P. Sicsic et B. Villeneuve, « L'Afflux d'or en France de 1928 à 1934 », janvier 1993.
23. M. Jeanblanc-Picqué and R. Avesani, "Impulse Control Method and Exchange Rate," September 1993.
24. A. Frachot and J.-P. Lesne, "Expectations Hypothesis and Stochastic Volatilities," July 1993 revised September 1993.
25. B. Bensaid and A. de Palma, "Spatial Multiproduct Oligopoly," February 1993 revised October 1994.
26. A. de Palma and R. Gary-Bobo, "Credit Contraction in a Model of the Banking Industry," October 1994.
27. P. Jacquinet et F. Mihoubi, « Dynamique et hétérogénéité de l'emploi en déséquilibre », septembre 1995.
28. G. Salmat, « Le retournement conjoncturel de 1992 et 1993 en France : une modélisation V.A.R. », octobre 1994.
29. J. Henry and J. Weidmann, "Asymmetry in the EMS Revisited: Evidence from the Causality Analysis of Daily Eurorates," February 1994 revised October 1994.
30. O. De Bandt, "Competition Among Financial Intermediaries and the Risk of Contagious Failures," September 1994 revised January 1995.
31. B. Bensaid et A. de Palma, « Politique monétaire et concurrence bancaire », janvier 1994 révisé en septembre 1995.
32. F. Rosenwald, « Coût du crédit et montant des prêts : une interprétation en terme de canal large du crédit », septembre 1995.
33. G. Cette et S. Mahfouz, « Le partage primaire du revenu : constat descriptif sur longue période », décembre 1995.
34. H. Pagès, "Is there a Premium for Currencies Correlated with Volatility ? Some Evidence from Risk Reversals," January 1996.
35. E. Jondeau and R. Ricart, "The Expectations Theory : Tests on French, German and American Euro-rates," June 1996.
36. B. Bensaid et O. De Bandt, « Les stratégies "stop-loss" : théorie et application au Contrat Notionnel du Matif », juin 1996.
37. C. Martin et F. Rosenwald, « Le marché des certificats de dépôts. Écarts de taux à l'émission : l'influence de la relation émetteurs-souscripteurs initiaux », avril 1996.

38. Banque de France - CEPREMAP - Direction de la Prévision - Erasme - INSEE - OFCE, « Structures et propriétés de cinq modèles macroéconomiques français », juin 1996.
39. F. Rosenwald, « L'influence des montants émis sur le taux des certificats de dépôts », octobre 1996.
40. L. Baumel, « Les crédits mis en place par les banques AFB de 1978 à 1992 : une évaluation des montants et des durées initiales », novembre 1996.
41. G. Cette et E. Kremp, « Le passage à une assiette valeur ajoutée pour les cotisations sociales : Une caractérisation des entreprises non financières “gagnantes” et “perdantes” », novembre 1996.
42. S. Avouyi-Dovi, E. Jondeau et C. Lai Tong, « Effets “volume”, volatilité et transmissions internationales sur les marchés boursiers dans le G5 », avril 1997.
43. E. Jondeau et R. Ricart, « Le contenu en information de la pente des taux : Application au cas des titres publics français », juin 1997.
44. B. Bensaïd et M. Boutillier, « Le contrat notionnel : Efficience et efficacité », juillet 1997.
45. E. Jondeau et R. Ricart, « La théorie des anticipations de la structure par terme : test à partir des titres publics français », septembre 1997.
46. E. Jondeau, « Représentation VAR et test de la théorie des anticipations de la structure par terme », septembre 1997.
47. E. Jondeau et M. Rockinger, « Estimation et interprétation des densités neutres au risque : Une comparaison de méthodes », octobre 1997.

Pour tous commentaires ou demandes sur les Notes d'Études et de Recherche, contacter la bibliothèque du Centre de recherche à l'adresse suivante :

For any comment or enquiries on the Notes d'Études et de Recherche, contact the library of the Centre de recherche at the following address:

BANQUE DE FRANCE  
41.1391 - Centre de recherche  
75 049 Paris CEDEX  
tél : 01 42 92 49 59