DOCUMENT

DE TRAVAIL

N° 430

UNE REVUE DE LA LITTÉRATURE DES MODÈLES

À FACTEURS DYNAMIQUES

Karim Barhoumi, Olivier Darné et Laurent Ferrara

Mars 2013

BANQUE DE FRANCE

EUROSYSTÈME

DIRECTION GÉNÉRALE DES ÉTUDES ET DES RELATIONS INTERNATIONALES

DIRECTION GÉNÉRALE DES ÉTUDES ET DES RELATIONS INTERNATIONALES

UNE REVUE DE LA LITTÉRATURE DES MODÈLES À FACTEURS DYNAMIQUES

Karim Barhoumi, Olivier Darné et Laurent Ferrara

Mars 2013

Une revue de la littérature des modèles à facteurs dynamiques

Karim BARHOUMI[*], **Olivier DARNÉ**[†] **et Laurent FERRARA**[‡]

[*] Fonds Monétaire International

[†] Université de Nantes, LEMNA, et Banque de France

[‡] Banque de France, Direction Générale des Etudes et des Relations Internationales, Service de Macroéconomie Internationale. Les auteurs tiennent à remercier Éric Dubois et Hélène Erkel-Rousse pour leurs remarques et suggestions, ainsi que deux rapporteurs anonymes. Cet article ne reflète pas nécessairement l'opinion de la Banque de France, ni celle du FMI.

Résumé:

Depuis quelques années, la quantité de données disponibles, économiques et financières, a incité les économètres à développer ou à adapter de nouvelles méthodes afin de résumer, de manière efficiente, l'information contenue dans ces grandes bases de données. Parmi les différentes méthodes proposées, les modèles à facteurs dynamiques ont connu un développement rapide et un large succès auprès des macroéconomistes. Dans cet article, nous proposons une revue de la littérature récente de ce type de modèles. Nous présentons d'abord les modèles utilisés, puis les méthodes d'estimation des paramètres et enfin les tests statistiques du nombre de facteurs. Dans la dernière partie, nous nous focalisons sur quelques applications récentes, en particulier pour la construction d'indicateurs conjoncturels, la prévision macroéconomique et les analyses macroéconomiques et de politique monétaire.

Mots-clés :

Modèles à facteurs dynamiques, estimation, tests du nombre de facteurs, applications macroéconomiques

Codes JEL :

C13, C51, C32, E66, F44

Abstract:

For few years, the increasing size of available economic and financial databases has led econometricians to develop and adapt new methods in order to efficiently summarize information contained in those large datasets. Among those methods, dynamic factor models have known a rapid development and a large success among macroeconomists. In this paper, we carry out a review of the recent literature on dynamic factor models. First we present the models used, then the parameter estimation methods and finally the statistical tests available to choose the number of factors. In the last section, we focus on recent empirical applications, especially dealing with the building of economic outlook indicators, macroeconomic forecasting and macroeconomic and monetary policy analyses.

Key words:

Dynamic factor models, estimation, tests for the number of factors, macroeconomic applications

JEL codes:

C13, C51, C32, E66, F44

1 Introduction

Depuis quelques années, la quantité de données disponibles, économiques et financières, a incité les économètres à développer ou à adapter de nouvelles méthodes afin de résumer, de manière efficiente, l'information contenue dans ces grandes bases de données. Dans de nombreux exemples en macroéconomie appliquée, il revient ainsi au praticien la tâche délicate d'identifier parmi le nombre élevé N de variables à sa disposition les quelques variables d'intérêt qui lui permettront de résoudre au mieux son problème.

Par exemple, les prévisions de croissance économique et d'inflation s'effectuent dans les institutions nationales et internationales à l'aide de nombreuses données d'enquêtes d'opinion, effectuées auprès des ménages et des industriels, ainsi que de multiples séries relatives aux évolutions de prix et à l'activité réelle, telles que l'indice de la production industrielle (IPI), la consommation des ménages, le taux de chômage, etc. De même, la gestion de la politique monétaire par les banques centrales se mène dans un environnement riche en données en effectuant de manière périodique une évaluation de l'activité macroéconomique et des différents marchés financiers, ainsi qu'un suivi de nombreux agrégats monétaires.

Plusieurs méthodes économétriques ont été avancées dans la littérature afin de travailler dans des environnements riches en données. Par exemple, lorsque l'on cherche à expliquer les évolutions d'une certaine variable à l'aide d'un vaste ensemble de N variables exogènes dans le cadre d'un modèle de régression linéaire, la méthode dite *general-to-specific* (Krolzig et Hendry, 2001) propose un algorithme qui permet de sélectionner seulement quelques variables parmi ces N variables. De même, les modèles vectoriels auto-régressifs (VAR) sont connus pour permettre la modélisation simultanée de variables dans un cadre multivarié. Classiquement, les modèles VAR font intervenir un petit nombre de variables pour éviter une inflation du nombre de paramètres à estimer. Pour pallier ce problème, des approches bayesiennes ont été proposées pour estimer des modèles VAR contenant un nombre élevé N de variables, en imposant des restrictions (voir par exemple De Mol, Giannone et Reichlin, 2008). Enfin, si on considère le problème de la prévision d'une certaine variable lorsqu'on dispose d'un nombre élevé de variables N ayant potentiellement un fort pouvoir explicatif, on peut envisager d'estimer N régressions linéaires, qui fourniront alors N prévisions que l'on cherchera à combiner (voir par exemple Newbold et Harvey, 2002, pour les méthodes de combinaisons de prévisions). On se réfère également à Eklund et Kapetanios (2008) pour une revue de la littérature sur les différentes techniques utilisant de grandes bases de données dans le cadre de la prévision.

Parmi les différentes méthodologies proposées dans le littérature, les modèles à facteurs dynamiques ont connu depuis le début des années 2000 un fort développement et se sont révélés comme des outils d'une grande utilité pour l'analyse et la prévision macroéconomiques dans un environnement riche en données. Ces modèles à facteurs permettent de résumer l'information présente dans un grand nombre de variables économiques en un petit nombre de facteurs communs à l'ensemble des variables. Ainsi, dans ce type de modèle, les N variables (x_{it}), pour $i = 1, \ldots, N$ et $t = 1, \ldots, T$, t désignant l'indice temporel, sont chacunes supposées être la somme de deux composantes inobservables orthogonales : une composante engendrée par des facteurs communs à l'ensemble des variables, (χ_{it}), et une composante idiosyncratique (ξ_{it}). La composante (χ_{it}) est obtenue par extraction d'un petit nombre $r \geq 1$ de facteurs communs (F_{jt}), $\;j = 1, \ldots, r$ à partir de toutes les variables présentes dans l'ensemble d'information. Souvent, par extension, cette composante (χ_{it}) est identifiée sous le terme de *composante commune* ; nous utiliserons également ce terme dans cet article pour s'y référer. La composante idiosyncratique (ξ_{it}) englobe, quant à elle, les chocs spécifiques à chacune des variables. Ainsi, dans un modèle à facteurs de dimension $(N \times 1)$, chaque élément du vecteur $X_t = (x_{1t}, ..., x_{Nt})^{'}$, supposé de moyenne nulle, peut être écrit de la manière suivante :

$$x_{it} = \chi_{it} + \xi_{it},$$

soit :

$$x_{it} = \lambda_{i1} F_{1t} + ... + \lambda_{ir} F_{rt} + \xi_{it}$$

pour $i = 1, \ldots, N$ et $t = 1, \ldots, T$. Les pondérations (λ_{ij}), pour $i = 1, \ldots, N$ et $j = 1, \ldots, r$, représentent les contributions de la variable i au facteur commun (F_t) de dimension $(r \times 1)$ tel que $F_t = (F_{1t}, ..., F_{rt})^{'}$. Le vecteur $(\xi_t) = (\xi_{1t}, ..., \xi_{Nt})^{'}$ de dimension $(N \times 1)$ est un vecteur composé des N composantes idiosyncratiques. La forme vectorielle du modèle se présente comme suit, pour tout $t = 1, \ldots, T$:

$$X_t = \Lambda F_t + \xi_t, \tag{1}$$

où Λ est la matrice des pondérations de dimension $(N \times r)$. La version matricielle est donnée par :

$$X = F\Lambda' + \xi, \tag{2}$$

où X est de dimension $(T\times N)$, F de dimension $(T\times r)$, Λ de dimension $(N\times r)$ et ξ de dimension $(T \times N)$.

Au vu du développement rapide des modèles à facteurs dynamiques en macroéconomie appliquée, il nous est apparu opportun de proposer une revue de littérature de ces modèles afin de faire un état des lieux pour les praticiens. Dans cet article, nous présentons dans un premier temps les modèles à facteurs dits traditionnels ou classiques, développés initialement pour un petit nombre de variables ayant des mouvements communs. Nous faisons la distinction entre les approches statique et dynamique de ces modèles. Dans un deuxième temps, nous décrivons les modèles à facteurs approchés, qui permettent de prendre en compte un grand nombre de variables, également dans un cadre statique et dynamique. Ensuite, nous présentons quelques méthodes d'estimation qui ont été proposées dans la littérature. Un aspect crucial de ces modèles est le choix du nombre r de facteurs communs à utiliser dans l'analyse. Ainsi, nous proposons une revue des différents critères d'information développés pour sélectionner le nombre optimal de facteurs. Par ailleurs, les applications des modèles à facteurs sont nombreuses dans la littérature économique empirique. On peut citer, par exemple, les modèles de prix des actifs (Ross, 1976), la théorie du consommateur (Gorman, 1981 ; Lewbel, 1991), l'évaluation de performance et les mesures de risque en finance (Campbell *et alii*, 1997). Dans la dernière partie de cet article, nous nous focalisons sur quelques applications récentes, qui viennent souligner l'intérêt de cette approche pour les macroéconomistes, en particulier (i) pour la construction d'indicateurs conjoncturels, (ii) pour la prévision macroéconomique et (iii) pour les analyses macroéconomiques et de politique monétaire.

2 Les modèles à facteurs pour un faible nombre de variables (N petit)

Dans cette partie, nous présentons les modèles à facteurs utilisés pour modéliser un petit nombre N de variables où, en pratique, N est en général inférieur à 6 ou 7 variables. Nous commençons par les modèles les plus simples qui n'intègrent pas de dynamique (facteurs statiques), puis nous détaillons les modèles dynamiques, pour finir avec quelques extensions récentes de ce type de modèles.

2.1 Le modèle à facteurs statiques (MFS)

Dans ce type de modèle, un nombre restreint r de variables inobservables expliquent de manière linéaire un petit nombre N de variables observées, de telle sorte que $r < N$. Dans les applications présentées dans la dernière partie de l'article, le nombre de variables est tel que $N \leq 7$ et un seul facteur suffit généralement à expliquer la majeure partie de la variance, soit $r = 1$. Les séries sont supposées stationnaires et de variance finie, ainsi que centrées et réduites. Nous posons les hypothèses suivantes, qui pourront être relâchées par la suite :

(SH1) les facteurs (F_t) sont centrés, $E(F_t) = 0$, et sont mutuellement orthogonaux pour tout t, *i.e.* : $\forall t$, $E(F_{jt}F_{j't}) = 0$ pour $j \neq j'$. Par conséquent, la matrice des variances-covariances de (F_t), $\Sigma_F = E(F_tF_t^{'})$, est une matrice diagonale ;

(SH2) les processus idiosyncratiques (ξ_{it}) et $(\xi_{i't})$ sont mutuellement orthogonaux pour tout $i \neq i'$, avec $E(\xi_t) = 0$. Par conséquent, la matrice des variances-covariances de (ξ_t) est une matrice diagonale : $\Sigma_\xi = E(\xi_t\xi_t') = diag(\sigma_1^2, ..., \sigma_N^2)$;

(SH3) les facteurs (F_t) et les bruits idiosyncratiques $(\xi_{it})_{i=1,...,N}$ sont non-corrélés, *i.e.* : $\forall i, j, t, t'$ nous avons : $E(F_{jt}\xi_{it'}) = 0$;

(SH4) Les variables sont supposées indépendantes et identiquement distribuées à travers le temps (hypothèse dite *i.i.d.*), d'où en particulier, pour $t \neq t'$, $E(F_{jt}F_{jt'}) = 0$ et $E(\xi_{it}\xi_{it'}) = 0$.

Le modèle donné par l'équation (1) représente le modèle à facteurs sous la forme statique (MFS), dans lequel les facteurs (F_t) ne possèdent pas de dynamique propre et la relation entre les facteurs et les variables se fait de manière linéaire à travers des pondérations constantes au cours du temps. L'estimation de ce modèle peut se faire soit en supposant que les variables sont *i.i.d.* (hypothèse SH4), soit en supposant qu'il existe une dynamique temporelle au sein des variables (SH4 est relâchée).

En supposant que (F_t) et (ξ_t) ne sont pas corrélés et de moyenne nulle, alors la matrice des variances-covariances du modèle à facteurs statiques, notée $\Sigma_X = E(X_t X_t')$, est donnée par :

$$\Sigma_X = \Lambda \Sigma_F \Lambda' + \Sigma_\xi \tag{3}$$

En normalisant la matrice des variances-covariances de (F_t), $\Sigma_F = I_r$, et en supposant que les éléments diagonaux de la matrice Σ_ξ de variances-covariances de (ξ_t) sont bornés, nous obtenons :

$$\Sigma_X = \Lambda\Lambda' + \Sigma_\xi \tag{4}$$

Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux articles de Lawley et Maxwell (1971) et Anderson (1984). Le modèle à facteurs statiques peut alors être identifié et estimé. L'estimation statique des facteurs se fait en utilisant la méthode de l'analyse factorielle. La matrice des pondérations Λ peut être estimée en minimisant la somme des carrés des résidus suivante :

$$\sum_{t=1}^{T} (X_t - \Lambda F_t)^{'} (X_t - \Lambda F_t) \tag{5}$$

sous la contrainte $\Lambda^{'}\Lambda = I_r$.

Dans ce cadre, Doz et Lenglart (1999) établissent les propriétés asymptotiques de l'estimateur. En particulier, les auteurs montrent que cette méthode fournit des estimateurs convergents même lorsque les données utilisées présentent de l'autocorrélation, ce qui est le cas des séries chronologiques. De plus, les auteurs montrent de manière empirique que cette méthode fournit une très bonne approximation de la méthode dynamique, tout en étant plus facile à mettre en place, ce qui est une qualité essentielle pour des conjoncturistes amenés à estimer régulièrement le modèle.

2.2 Le modèle à facteurs dynamiques (MFD) exact ou strict

Le modèle à facteurs statiques (MFS) est différent du modèle à facteurs dynamiques (MFD), exact ou strict, au sens où ce dernier incorpore une dynamique temporelle. Ainsi, dans le modèle MFD, la composante commune peut être vue comme une somme de chocs communs, contemporains et retardés. On définit alors le modèle de la manière suivante :

$$x_{it} = \chi_{it} + \xi_{it}, \tag{6}$$

où :

$$\begin{aligned}\chi_{it} &= b_{i1}^0 u_{1t} + \ldots + b_{i1}^s u_{1,t-s} + b_{i2}^0 u_{2t} + \ldots + b_{i2}^s u_{2,t-s} + \ldots \\ &+ b_{iq}^0 u_{qt} + \ldots + b_{iq}^s u_{q,t-s}, \end{aligned} \tag{7}$$

où (u_t), de dimension $(q \times 1)$, est le vecteur des chocs communs tel que $u_t = (u_{1t}, u_{2t}, \ldots, u_{qt})'$, avec $q \leq N$, et où s est le nombre de retards inclus dans le modèle. Les paramètres réels (b_{il}^{τ}), pour $\tau = 0, \ldots, s$, $i = 1, \ldots, N$ et $l = 1, \ldots, q$, représentent les pondérations des facteurs dynamiques d'ordre fini s. On parlera de modèle MFD *restreint* lorsque s est fini et de modèle MFD *généralisé* lorsque s est infini[1].
L'équation (7) peut se ré-écrire sous la forme suivante :

$$\chi_{it} = \sum_{l=1}^{q} b_{il}(L) u_{lt}, \tag{8}$$

où les $b_{il}(z) = b_{il}^0 + b_{il}^1.z + \cdots + b_{il}^s.z^s$ sont des polynômes de degré s et où L est l'opérateur retard tel que, pour tout entier s, $L^s u_t = u_{t-s}$. Sous une forme matricielle, on peut ré-écrire l'équation (7) de telle sorte que :

$$\chi_{it} = B_i(L) u_t, \tag{9}$$

où $B_i(L) = (b_{i1}(L), \ldots, b_{iq}(L))$ est un vecteur de q polynômes de degré s.

Par ailleurs, on suppose (Bai et Ng, 2007) que le vecteur $B_i(L)$ peut se décomposer de la manière suivante :

$$B_i(L) = \lambda_i^*(L) C(L), \tag{10}$$

où $\lambda_i^*(L)$ est un vecteur de r polynômes de degré s et où $C(L)$ est une matrice de dimension $(r \times q)$. En utilisant les équations (9) et (10), on peut alors écrire la composante commune sous la forme suivante :

$$\chi_{it} = \lambda_i^*(L) F_t^*, \tag{11}$$

où $F_t^* = C(L) u_t$ est un vecteur de dimension r qui fait référence aux *facteurs statiques*, et les chocs communs u_t de dimension $(q \times 1)$ aux *facteurs dynamiques*.

[1] Pour une discussion sur la relation entre MFD restreint et MFD généralisé, voir Giannone *et alii* (2006) ou Forni *et alii* (2009).

Un modèle avec q facteurs dynamiques peut ainsi être considéré comme un modèle à $r = q(s+1)$ facteurs statiques.

Dans le cadre des modèles à facteurs dynamiques de petite dimension, l'estimation se fait généralement dans le domaine temporel par maximisation de la vraisemblance, tel que cela a été proposé par Dempster *et alii* (1977), Shumway et Stoffer (1982), Watson et Engle (1983), et Stock et Watson (1989)[2].

Afin d'estimer le modèle MFD lorsque N est petit, on effectue généralement les hypothèses suivantes :

(DH1) Les facteurs (F_{jt}) et $(F_{j't})$ sont mutuellement orthogonaux, mais les facteurs (F_{jt}) peuvent être autocorrélés et sont de matrice de variances-covariances stationnaire, *i.e.* : $\forall j \neq j', \tau \neq 0$, $E(F_{j,t}) = 0$, $cov(F_{j,t}, F_{j',t-\tau}) = 0$ et $cov(F_{j,t}, F_{j,t-\tau})$ ne dépend que de τ.

(DH2) Les processus idiosyncratiques (ξ_{it}) et $(\xi_{i't})$ sont mutuellement orthogonaux, mais les processus (ξ_{it}) peuvent être autocorrélés et faiblement stationnaires, *i.e.* : $\forall i \neq i', \tau \neq 0$, $E(\xi_{it}) = 0$, $cov(\xi_{i,t}, \xi_{i',t-\tau}) = 0$ et $cov(\xi_{i,t}, \xi_{i,t-\tau})$ ne dépend que de τ.

(DH3) Les facteurs (F_{jt}) et les processus idiosyncratiques (ξ_{it}) sont orthogonaux pour tout i, j.

Sous ces hypothèses, on peut alors chercher à estimer un modèle à facteurs dynamiques par maximisation de la vraisemblance dans le domaine temporel, sous l'hypothèse additionnelle de normalité des résidus du modèle. L'estimateur du maximum de vraisemblance est calculé en mettant d'abord le modèle sous une forme espace-état, puis en utilisant un filtre récursif de type filtre de Kalman.

Le modèle MFD peut s'écrire sous une forme espace-état, en supposant que les

[2] Une autre méthode d'estimation de ce type de modèle a été proposée dans le domaine des fréquences, à partir d'une analyse spectrale, par Sargent et Sims (1977) et Geweke (1977). Ce type d'estimation dans le domaine des fréquences est repris dans la troisième partie intitulée "L'estimation des modèles à facteurs pour N grand".

facteurs communs suivent un processus VAR d'ordre p tel que :

$$\Phi(L)F_t = \varepsilon_t \qquad \Leftrightarrow \qquad F_t = \sum_{\tau=1}^{p} \Phi_\tau F_{t-\tau} + \varepsilon_t, \tag{12}$$

et, pour un indice i donné, le processus idiosyncratique (ξ_{it}) suit un processus AR d'ordre p' de la forme suivante :

$$\psi_i(L)\xi_{it} = \eta_{it} \qquad \Leftrightarrow \qquad \xi_{it} = \sum_{\tau=1}^{p'} \psi_{i\tau}\xi_{i,t-\tau} + \eta_{it}, \tag{13}$$

où (ε_t) et (η_{it}) sont respectivement les innovations de (F_t) et de (ξ_{it}) de telle sorte que (ε_t) et (η_{it}) soient indépendants. $\Phi(.)$ et $\psi(.)$ sont des polynômes d'ordres respectifs p et p' tels que $\phi(L) = I - \phi_1 L - \ldots - \phi_p L^p$ et $\psi_i(L) = I - \psi_{i1}L - \ldots - \psi_{ip'}L^{p'}$, où L est l'opérateur retard. L'hypothèse de normalité est posée pour (ε_t) et (η_{it}). En pratique, les ordres p et p' des polynômes de retards doivent être choisis avant l'étape d'estimation. Ce choix se fait généralement par minimisation d'un critère d'information de type AIC (*Akaike Information Criterion*) ou BIC (*Bayesian Information Criterion)* ou en utilisant le test de Doz et Lenglart (1999). Dans les études empiriques, il s'avère que $p = 2$ et $p' = 1$ est souvent suffisant pour blanchir les résidus.

Ce type de modèle donné par les équations (1),(12) et (13) admet une représentation espace-état de la forme suivante :

$$X_t = c_t\beta_t + m_t Z_t + w_t, \tag{14}$$

où (Z_t) est un vecteur de n variables explicatives, par exemple les valeurs retardées des variables observées (X_t), et où :

$$\beta_t = a_t\beta_{t-1} + v_t. \tag{15}$$

L'équation (14) est l'équation de mesure, qui décrit les relations entre les états inobservables, de dimension r, et les variables observables, de dimension n, où β_t représente le vecteur d'état :

$$\beta_t = \begin{bmatrix} F_t \\ \vdots \\ F_{t-p+1} \\ \xi_t \\ \vdots \\ \xi_{t-q+1} \end{bmatrix}$$

L'équation (15) représente l'équation d'état ou de transition, qui décrit l'évolution des états inobservables. Notons que a_t, c_t et m_t sont des matrices qui peuvent dépendre du temps, de dimensions respectives $((p \times r + q \times N) \times (p \times r + q \times N))$, $(N \times (p \times r + q \times N))$ et $(N \times n)$, et où v_t est un vecteur bruit blanc gaussien de dimension $(p \times r + q \times N)$, w_t est un vecteur bruit blanc gaussien de dimension N, de matrices de variances-covariances respectives Q_t et R_t. En pratique, le système est généralement supposé invariant au cours du temps, *i.e.* a_t, c_t et m_t sont des constantes. On suppose également que, pour tout t, $t' \neq t$, $E(v_t w'_t) = 0$.

Le modèle mis sous sa forme espace-état peut alors être ensuite estimé par maximum de vraisemblance à l'aide d'une méthode de filtrage telle que le filtre de Kalman. On se réfère par exemple à Hamilton (1994) pour une description de l'algorithme de filtrage. L'algorithme d'estimation par maximum de vraisemblance peut prendre beaucoup de temps car il requiert l'inversion d'une matrice de grande dimension, même lorsque N est petit. En général, s'agissant de l'optimisation numérique, l'algorithme *Expectation-Maximisation* (EM) est utilisé, comme cela a été proposé par Dempster *et alii* (1977) ou Shumway et Stoffer (1982)[3].

2.3 Extensions récentes des modèles à facteurs avec N petit

Plusieurs extensions des modèles à facteurs avec un petit nombre de variables ont récemment été proposées pour tenir compte de certaines caractéristiques des données. Nous en présentons deux ci-dessous : les modèles à changements de régimes markoviens et les modèles multi-fréquences.

2.3.1 Modèles à changements de régimes markoviens

Ces modèles sont directement liés aux processus à changements de régimes markoviens introduit par Hamilton (1989) et supposent que les facteurs communs inobservables possèdent une dynamique propre gouvernée par une chaîne de Markov à deux régimes, notée (S_t), avec pour tout t, $S_t \in \{1, 2\}$. L'idée de ces modèles est de supposer que les facteurs sont liés à l'état de l'économie qui, elle-même, évolue de manière cyclique non périodique selon deux phases con-

[3] De manière alternative, l'algorithme de *scoring* de Fisher est utilisé par Watson et Engle (1983).

joncturelles qui se suivent. On suppose alors que, par exemple, le premier régime ($S_t = 1$) correspond à la phase basse du cycle et le second régime ($S_t = 2$) à la phase haute du cycle. Le modèle peut facilement être étendu à un plus grand nombre de régimes, mais les problèmes d'estimation deviennent alors délicats dans la mesure où le modèle contient deux niveaux de latence, à savoir les facteurs communs et la chaîne de Markov.

Un premier modèle de ce type a été proposé initialement par Diebold et Rudebusch (1996), mais les aspects théoriques et empiriques ont été largement considérés par Kim et Yoo (1995) et Kim et Nelson (1998). De manière indépendante et à la même époque, Chauvet (1998) a proposé un modèle similaire. Par exemple, dans le cas d'un seul facteur (*i.e.* $r = 1$), pour N variables stationnaires centrées, le modèle à changements de régimes markoviens peut être défini de la manière suivante pour $i = 1, \ldots, N$ et $t = 1, \ldots, T$:

$$x_{it} = \lambda_i' F_t + \xi_{it}, \tag{16}$$

avec

$$\phi(L) F_t = \mu(S_t) + \epsilon_t, \tag{17}$$

où les λ_i sont les pondérations telles que $\lambda_i = (\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{ir})$, où, pour chaque i, $(\xi_{it})_t$ suit un processus autorégressif d'ordre un (AR(1)) gaussien de variance finie σ_i^2, où $(\epsilon_t)_t$ est un bruit blanc gaussien de variance unitaire et où $\phi(L) = I - \phi_1 L - \ldots - \phi_p L^p$. Si on suppose que $(S_t)_t$ est une chaîne de Markov du premier ordre à deux régimes, cela signifie que la probabilité pour S_t d'appartenir à un régime à la date t ne dépend que de la probabilité d'être dans un certain régime à la date $t-1$, soit :

$$P(S_t | S_{t-1}, S_{t-2}, S_{t-3}, \ldots) = P(S_t | S_{t-1}). \tag{18}$$

Les probabilités de transition $p_{12} = P(S_t = 2 | S_{t-1} = 1)$ et $p_{21} = P(S_t = 1 | S_{t-1} = 2)$ mesurent la probabilité de passer d'un régime à l'autre. De même, les probabilités $p_{11} = 1 - p_{12}$ et $p_{22} = 1 - p_{21}$ mesurent la probabilité de rester dans le même régime, reflétant ainsi le degré de persistence de chaque régime. L'étape d'estimation permet d'estimer pour chaque date t les probabilités prévue, filtrée et lissée d'être dans un certain régime, respectivement données par $P(S_t | \hat{\theta}, X_{t-1}, \ldots, X_1)$, $P(S_t | \hat{\theta}, X_t, \ldots, X_1)$ et $P(S_t | \hat{\theta}, X_T, \ldots, X_1)$, où $\hat{\theta}$ represente l'ensemble des paramètres estimés du modèle, qui comprend les N paramètres autorégressifs des modèles AR(1), les N variances idiosyncratiques et les p paramètres du polynôme $\phi(.)$.

L'estimation des paramètres de ce modèle peut être menée simultanément par maximum de vraisemblance, comme cela est proposé par Kim et Nelson (1998), ou en deux étapes en estimant d'abord le facteur commun (F_t) dans le domaine temporel ou spectral (voir précédemment), puis en ajustant un processus autorégressif à changements de régimes sur ce facteur estimé (voir sur ce point Diebold et Rudebusch, 1996). D'un point de vue théorique, l'estimation simultanée est préférable mais, d'un point vue empirique, l'algorithme de maximisation a souvent du mal à converger, en particulier si les variables possèdent une forte volatilité. L'estimation en deux étapes est plus pratique (voir Darné et Ferrara, 2011, pour une application) mais la seconde équation (17) incorpore alors une erreur de mesure des facteurs estimés qui n'est pas intégrée explicitement dans le modèle, pouvant ainsi créer des problèmes d'inférence statistique.

2.3.2 Modèles à périodicités multiples

De nombreuses séries macroéconomiques sont disponibles pour le conjoncturiste, mais pas forcément sur une même fréquence d'échantillonnage (ou périodicité). En particulier les comptes nationaux, que la plupart des économistes cherchent à prévoir, ne sont disponibles que sur une base trimestrielle alors que de nombreux indicateurs conjoncturels tels que l'indice de la production industrielle (IPI), les dépenses de consommation des ménages ou les enquêtes d'opinion le sont sur une base mensuelle. Afin de pouvoir gérer simultanément ces deux périodicités dans un modèle, Mariano et Murasawa (2003) ont proposé un modèle à facteurs dynamiques, mis sous une forme espace-état, qui considère les séries trimestrielles comme des séries mensuelles contenant des valeurs manquantes.

L'idée de ce type de modèle est de chercher à estimer un facteur commun à N variables, dont certaines sont trimestrielles et d'autres mensuelles. Ainsi, on note $(Y_{1,t})$ un vecteur de N_1 variables trimestrielles observables uniquement au troisième mois t du trimestre et $(Y_{2,t})$ un vecteur de N_2 variables mensuelles, de telle manière que $N_1 + N_2 = N$. On suppose ici que ces séries (en logarithmes) sont intégrées d'ordre un. On suppose également qu'il existe un vecteur $(Y^*_{1,t})_t$ de N_1 variables mensuelles inobservables de telle sorte que pour tout t, $Y_{1,t}$ soit la moyenne géométrique de $Y^*_{1,t}$ sur les trois mois d'un trimestre donné, *i.e.* :

$$\log(Y_{1,t}) = \frac{1}{3}\left[\log(Y^*_{1,t}) + \log(Y^*_{1,t-1}) + \log(Y^*_{1,t-2})\right]. \tag{19}$$

On notera que cette identité (19) diffère de la moyenne arithmétique habituellement utilisée dans les comptes trimestriels mais permet d'implémenter une forme espace-état linéaire, contrairement à l'identité arithmétique qui nécessite une forme non-linéaire.
Mariano et Murasawa (2003) montrent alors que :

$$y_{1,t} = \frac{1}{3}y^*_{1,t} + \frac{2}{3}y^*_{1,t-1} + y^*_{1,t-2} + \frac{2}{3}y^*_{1,t-3} + \frac{1}{3}y^*_{1,t-4} \tag{20}$$

où $y_{1,t} = Y_{1,t} - Y_{1,t-3}$ et $y^*_{1,t} = Y^*_{1,t} - Y^*_{1,t-1}$, $(y_{1,t})$ étant observable toutes les trois périodes et $(y^*_{1,t})$ étant inobservable.

Sous des hypothèses standards de dynamique sur les facteurs et les erreurs idiosyncratiques, ainsi que de normalité des résidus (voir Mariano et Murasawa, 2003, p. 430), on peut montrer que le modèle à un facteur (F_t) s'écrit sous la forme suivante pour tout t :

$$\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1(\frac{1}{3}F_t + \frac{2}{3}F_{t-1} + F_{t-2} + \frac{2}{3}F_{t-3} + \frac{1}{3}F_{t-4}) \\ a_2F_t \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{1}{3}u_{1,t} + \frac{2}{3}u_{1,t-1} + u_{1,t-2} + \frac{2}{3}u_{1,t-3} + \frac{1}{3}u_{1,t-4} \\ u_{2,t} \end{pmatrix} \tag{22}$$

où $a = (a'_1, a'_2)'$ est le vecteur des pondérations de dimension N, (F_t) est le facteur commun scalaire, $u_t = (u'_{1,t}, u'_{2,t})'$ est la composante idiosyncratique de dimension N et où $y_{2,t} = Y_{2,t} - Y_{2,t-1}$. Le modèle est ensuite mis sous une forme espace-état (voir Mariano et Murasawa, 2003, p. 431), puis estimé par maximum de vraisemblance à l'aide d'un filtre de Kalman.

D'autres approches ont été proposées pour gérer simultanément des données de périodicités différentes dans le cas de modèles à facteurs. Par exemple, Aruoba, Diebold et Scotti (2009) proposent également un modèle à facteurs contenant quatre variables de périodicités différentes (journalière, hebdomadaire, mensuelle et trimestrielle) pour estimer le PIB américain avec une périodicité élevée. En pratique, cet indicateur est mis à jour toutes les semaines par la *Federal Reserve Bank* de Philadelphie sur son site internet. De même, Camacho et Perez-Quiros (2010, 2011) ont proposé un modèle à facteurs qui traite simultanément des variables de périodicités différentes et des changements de régimes dans les facteurs, afin d'estimer la croissance du PIB en zone euro et en Espagne. S'agissant de données françaises, Cornec et Desperraz (2006) construisent un indicateur synthétique d'activité dans les services à partir de données d'enquêtes mensuelles et trimestrielles. Cornec (2006) développe également un indicateur à partir d'un modèle à facteurs à périodicités multiples (voir la dernière partie relative aux applications). D'une manière plus générale, on soulignera que ce type d'approche permet de traiter le problème des données manquantes dans les séries dans un modèle économétrique.

3 Les modèles à facteurs approchés (N grand)

Bien que l'idée de modèles à facteurs soit attrayante, l'approche traditionnelle présentée dans la partie précédente possède un certain nombre de limites, théoriques et pratiques.

1. Le nombre de variables (N) est souvent plus important que le nombre d'observations (T) dans les séries de données économiques. Par conséquent, de l'information potentiellement importante est perdue lorsqu'un petit nombre de variables doit être choisi afin de respecter la contrainte que N soit petit;

2. la convergence asymptotique des estimateurs est assurée lorsque T tend vers l'infini N étant fixé, mais pas lorsque N tend aussi vers l'infini;

3. les hypothèses *i.i.d.* et de diagonalité de la matrice des variances-covariances de la composante idiosyncratique Σ_ξ, qui interdisent la corrélation transversale, sont trop fortes pour les données économiques. Ceci peut entraîner un risque de mauvaise spécification;

4. l'estimation du maximum de vraisemblance (MV) est généralement considérée comme irréalisable pour des modèles à facteurs de grande dimension car le nombre de paramètres à estimer est trop important (Bai, 2003; Bai et Ng, 2002);

5. l'approche traditionnelle permet d'estimer de manière cohérente les coefficients des facteurs de pondération (λ_i) par MV lorsque T est grand mais pas les facteurs communs (F_t), dont on ne peut obtenir que leur valeur espérée (Steiger, 1979). Or, dans la plupart des problèmes économiques,

l'intérêt se porte le plus souvent sur ces facteurs communs – représentant, par exemple, les chocs communs, les indices de diffusion, etc.

Pour répondre à un certain nombre de ces limites, l'idée des modèles à facteurs a été généralisée pour pouvoir manipuler des hypothèses moins strictes sur la matrice des variances-covariances des composantes idiosyncratiques, en proposant une structure de facteurs approchée. Des estimateurs non paramétriques des facteurs communs fondés sur les composantes principales ont été suggérés (Forni *et alii*, 2000 ; Stock et Watson, 2002a), leurs propriétés asymptotiques étant connues lorsque N est grand. Par conséquent, de nouvelles méthodologies ont été proposées.

3.1 Les modèles à facteurs statiques (MFS) approchés

Chamberlain et Rothschild (1983) ont été les premiers à introduire la notion de structure à facteurs dite « approchée » en relâchant l'hypothèse que les perturbations idiosyncratiques ne soient pas corrélées entre elles dans la structure à facteurs dite « stricte », c'est-à-dire en permettant aux erreurs idiosyncratiques d'être faiblement corrélées. Cette notion permet ainsi d'obtenir une matrice des variances-covariances $\Sigma_\xi = E(\xi_t \xi_t')$ non diagonale. De plus, Chamberlain et Rothschild ont montré que l'analyse en composantes principales (ACP) est équivalente à l'analyse de facteurs (ou au maximum de vraisemblance sous l'hypothèse de normalité de la composante idiosyncratique (ξ_{it})) lorsque N augmente vers l'infini. Néanmoins, ils supposent que la matrice des variances-covariances de la population, Σ_X, de dimension $(N \times N)$ est connue. Connor et Korajczyk (1986, 1988, 1993) ont étudié le cas d'une matrice des variances-covariances Σ_X inconnue et ils suggèrent que, lorsque N est plus grand que T, alors le modèle à facteurs peut être estimé en appliquant une ACP à la matrice des variances -covariances Σ_X, de dimension $(T \times T)$.

Connor et Korajczyk (1986) ont montré la cohérence des facteurs estimés par l'ACP quand T est fixé et N tend vers l'infini dans le cadre de modèles à facteurs approchés mais ils n'ont fourni aucun argument formel lorsque N et T tendent simultanément vers l'infini[4]. Stock et Watson (1999) ont étudié la cohérence uniforme des facteurs estimés et ils ont dérivé des taux de convergence pour T et N grands. Le taux de convergence a également été étudié par Bai

[4]Ding et Hwang (1999) ont obtenu des résultats sur la cohérence pour l'estimation par ACP de modèles à facteurs exacts traditionnels lorsque N et T tendent vers l'infini.

et Ng (2002). Enfin, Bai (2003) a montré que l'estimateur ACP de la composante commune est asymptotiquement normal, convergeant à un taux égal au $\min(N^{1/2}, T^{1/2})$, même si la composante idiosyncratique est sériellement corrélée et/ou hétéroscédastique lorsque N et T sont grands[5].

3.2 Les modèles à facteurs dynamiques (MFD) approchés

Par la suite, Forni et Lippi (1997), Forni et Reichlin (1998) et Forni *et alii* (2000, 2004) ont étendu les modèles à facteurs approchés en considérant des modèles à facteurs dynamiques de grandes dimensions et ont introduit différentes méthodes pour l'estimation de ce type de modèle. Ces modèles sont dits « généralisés » car ils combinent à la fois les structures dynamiques et approchées, c'est-à-dire qu'ils généralisent les MFD exacts en supposant que le nombre de variables N tend vers l'infini et en permettant aux processus idiosyncratiques d'être corrélés entre eux.

Forni *et alii* (2000, 2004) ont étendu l'analyse en composantes principales dynamiques introduite par Brillinger (1981) lorsque N est grand. L'estimation proposée par Brillinger (1981) généralise l'ACP statique en plongeant l'analyse dans le domaine des fréquences. D'abord, la densité spectrale du vecteur X_t est estimée en utilisant un estimateur de densité spectrale cohérent, noté $\widehat{S}(\omega)$, pour une fréquence $\omega \in]0, 2\pi]$. Ensuite, les vecteurs propres correspondant aux q plus grandes valeurs propres de cette matrice spectrale sont calculés. Enfin, on retourne dans le domaine temporel en appliquant la transformation inverse de Fourier à ces vecteurs propres, afin de récupérer les estimateurs de la série temporelle en composantes principales dynamiques (voir partie suivante).

Brillinger (1981) obtient des résultats distributionnels lorsque N est fixé et T tend vers l'infini. Forni *et alii* (2000) montrent que l'ACP dynamique fournit une estimation cohérente de la composante commune lorsqu'à la fois N et T augmentent. Forni *et alii* (2004) discutent des conditions de cohérence et des taux de convergence.

Il a été démontré que les composantes principales sont des estimateurs convergents des facteurs, dans le cadre statique (Bai et Ng, 2002 ; Stock et Watson,

[5] Jones (2001) et Boivin et Ng (2005) ont proposé des estimateurs ACP pondérés en considérant le problème des moindres carrés généralisés non-linéaires suivant : $\min_{F_1,\ldots,F_T,\Lambda} \sum_{t=1}^{T} (X_t - \Lambda F_t)' \Sigma_\xi^{-1} (X_t - \Lambda F_t)$, avec (ξ_t) étant *i.i.d* et de loi Normale $N(0, \Sigma_\xi)$. Stock et Watson (2005a) ont étendu l'approche de l'ACP pondérée en supposant une structure autorégressive de faible ordre pour (ξ_t).

2002a ; Bai, 2003), mais aussi dans le cadre dynamique (Forni *et alii*, 2000, 2004).

Les modèles à facteurs approchés présentent plusieurs avantages par rapport aux modèles stricts. Ils sont flexibles et appropriés sous des hypothèses générales sur les erreurs de mesure et, en général, sur la corrélation croisée des composantes idiosyncratiques. L'erreur de mauvaise spécification due à la structure approchée de la composante idiosyncratique disparaît lorsque N et T sont grands, à condition que la corrélation croisée des processus idiosyncratiques soit relativement faible et que celle des composantes communes soit croissante à travers la dimension transversale quand N augmente. Ces conditions ont été introduites par Chamberlain et Rothschild (1983) et utilisées, ré-interprétées et étendues par, respectivement, Connor et Korajczyk (1986, 1988, 1993), Forni et Lippi (1997), Forni *et alii* (2000) et Stock et Watson (2002). En résumé, les modèles à facteurs approchés apportent deux avantages importants par rapport aux modèles à facteurs traditionnels :

1. les composantes idiosyncratiques peuvent à la fois être faiblement corrélées entre elles et présenter peu d'hétéroscédasticité. Ceci peut se traduire par la condition que toutes les valeurs propres de la matrice des variances-covariances idiosyncratiques $\Sigma_\xi = E(\xi_t \xi_t')$ soient bornées, ainsi la moyenne absolue des covariances est bornée, *i.e.* : $\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |E(\xi_{it}\xi_{jt})| < \infty$ (Stock et Watson, 2002a)[6] ;

2. dans ce type de modèle, il est possible d'avoir une faible corrélation entre les facteurs (F_t) et les composantes idiosyncratiques (ξ_t).

3.3 Extensions récentes des modèles à facteurs approchés

Parmi les récentes extensions des modèles à facteurs dynamiques lorsque N est grand, nous présentons les modèles FAVAR, les modèles dont les paramètres évoluent dans le temps et les modèles à périodicités multiples. Les applications de ces différents types de modèles sont présentées dans la dernière partie relative aux applications. On notera que ces modèles supposent la stationnarité des variables. Pour le développement des modèles à facteurs dynamiques

[6]La condition technique précise admettant une faible corrélation des termes idiosyncratiques varie d'une étude à l'autre mais, en général, cette condition limite la contribution des covariances idiosyncratiques à la matrice des variances-covariances de X_t lorsque N est grand.

sur données non stationnaires, nous nous référons par exemple à Pẽna et Poncela (2006a, 2006b). D'autre part, Banerjee et Marcellino (2009) ont étendu le modèle FAVAR au modèle à correction d'erreur augmenté de facteurs (*Factor-augmented Error Correction Model*), qui permet ainsi d'intégrer des variables non stationnaires.

3.3.1 Les modèles FAVAR

Afin de pallier le problème des variables omises, généralement rencontré dans les modélisations VAR et SVAR (*Structural VAR*) traditionnelles, Bernanke, Boivin et Eliasz (2005) ont proposé d'utiliser des modèle de type *Factor Augmented VAR* (FAVAR), en particulier dans le cadre de l'analyse de la politique monétaire.

Le modèle FAVAR peut être décrit par l'équation suivante :

$$X_t = \Lambda F_t + BX_{t-1} + \xi_t \tag{23}$$

où (X_t) représente les variables endogènes d'un modèle VAR classique, comme dans Bernanke *et alii* (2005) et Boivin *et alii* (2009), (F_t) le facteur commun, Λ la matrice des pondérations et (ξ_t) la composante idiosyncratique. Dans Stock et Watson (2005a), B est une matrice diagonale $D(L)$ avec un polynôme de retards $\delta_i(L)$ sur la i-ème diagonale. Il est également envisageable de spécifier une dynamique de court terme, par exemple de type autorégressive d'ordre 1, sur le facteur commun (F_t) et sur la composante idiosyncratique (ξ_t).

Stock et Watson (2005a) proposent d'utiliser une procédure itérative pour estimer le modèle FAVAR donné par l'équation (23). Cette procédure débute par une estimation initiale du facteur statique $\hat{F}_t$ à l'aide d'une ACP. Ensuite, la matrice des pondérations $\hat{\Lambda}$ et les coefficients $\hat{B}$ sont estimés par moindres carrés ordinaires. Enfin, les facteurs $\hat{F}_t$ sont réestimés par les composantes principales de $X_t - \widehat{B}X_{t-1}$ et cette procédure est itérée jusqu'à convergence. Boivin *et alii* (2009) utilisent également cette procédure itérative avec comme estimation initiale $B = 0$. Bernanke *et alii* (2005) proposent d'estimer les facteurs inobservables en deux étapes : (1) les composantes principales des variables informationnelles sont calculées en ignorant la présence des variables observables ; (2) on estime l'équation (23) en intégrant les facteurs estimés dans l'étape précédente. D'autres travaux sur l'analyse de la politique monétaire sont fondés sur l'estimation de facteurs à partir d'un MFD, ces facteurs estimés étant ensuite introduits dans un modèle VAR comme régresseurs additionnels. On pourra se référer, par exemple, à Giannone *et alii* (2004) et Favero *et alii* (2005).

3.3.2 Les modèles à paramètres variant dans le temps

Certains auteurs s'intéressent également à des modèles à facteurs pour lesquels, par exemple, les pondérations, regroupées dans la matrice Λ de l'équation (1), varient au cours du temps (voir par exemple Motta, Hafner et von Sachs, 2011). Ce type d'approche est prometteur car il permet d'intégrer dans la modélisation des changements structurels relatifs à la source et à l'amplitude des chocs, ainsi qu'à leurs canaux de transmission à l'économie. De même, ce type de modélisation intègre la non-linéarité dans les relations. En particulier cela permet d'évaluer si les comportements évoluent au cours du cycle économique.

Dans le cadre des modèles FAVAR, quelques travaux récents ont intégré une structure dynamique en permettant une évolution au cours du temps (i) des pondérations, (ii) de la dynamique autorégressive des facteurs ou (iii) de la variance des innovations. Ainsi, une spécification possible du modèle *Time-Varying* FAVAR (TV-FAVAR) est la suivante :

$$X_t = \Lambda_t F_t + B_t X_{t-1} + \xi_t, \tag{24}$$

avec $E(\xi_t) = 0$ et $E(\xi_t \xi_t') = \Sigma_{\xi_t}$.

Généralement, l'estimation du modèle FAVAR donné par l'équation (24) se fait dans un cadre bayesien comme cela a été fait dans les articles de Del Negro et Otrok (2008), Mumtaz et Surico (2009) ou Baumeister, Liu et Mumtaz (2010). De même, dans un cadre bayesien, Kose, Otrok et Whiteman (2003) ont proposé une estimation des modèles à facteurs dynamiques reposant sur une approche MCMC (*Monte Carlo Markov-Chain*[7]).

Eickmeier, Lemke et Marcellino (2011) proposent une approche alternative en développant une méthode d'estimation standard en deux étapes par maximum de vraisemblance. La première étape consiste à estimer les facteurs dans un cadre statique (voir partie suivante) puis, dans un second temps, le modèle à paramètres non constants est estimé équation par équation. Ainsi, chaque équation de régression univariée est mise sous forme espace-état, puis estimée

[7] Les méthodes MCMC sont des méthodes numériques qui engendrent de longues chaînes de Markov permettant d'obtenir ainsi des échantillons distribués asymptotiquement selon une certaine loi de distribution.

de manière classique à l'aide d'un filtre de Kalman. Cette approche requiert de supposer que les équations du modèle FAVAR soient conditionellement indépendantes.

3.3.3 Les modèles à périodicités multiples

Enfin, dans ce contexte d'un grand nombre N de variables disponibles dans la base de données, la gestion des variables de périodicités différentes peut se faire dans le cadre d'une régression MIDAS (*MIxed DAta Sampling*) proposée par Ghysels et ses co-auteurs (voir par exemple Ghysels, Sinko et Valkanov, 2007, pour une présentation). L'approche MIDAS permet d'expliquer une variable échantillonnée selon une certaine périodicité (par exemple annuelle ou trimestrielle) par des variables à plus haute périodicité (par exemple mensuelle ou journalière), sans avoir à agréger au préalable les données à plus haute périodicité. Cette approche repose sur une équation de régression linéaire standard mais implique l'estimation d'une fonction de poids dépendant d'un hyperparamètre de dimension réduite, par rapport à la dimension initiale du problème.

Ainsi, supposons que l'on cherche à estimer le taux de croissance trimestriel du PIB d'une économie, noté (y_t), supposé stationnaire, pour un nombre de trimestres T, l'indice t désignant ici le trimestre. Supposons également que, à l'aide d'une des méthodes présentées dans la partie suivante, l'on ait estimé un unique facteur stationnaire mensuel $(\hat{F}_t^{(m)})$ (*i.e.* : $r = 1$) à partir d'une grande base de données mensuelles. Ainsi, on observe $m = 3$ fois $(\hat{F}_t^{(m)})$ sur la période $[t-1, t]$. L'équation standard MIDAS permet de relier la variable trimestrielle à expliquer au facteur mensuel estimé de la manière suivante :

$$y_t = c_0 + c_1 \; G(\theta) \; \hat{F}_t^{(m)} + \epsilon_t, \tag{25}$$

où c_0 et c_1 sont les paramètres à estimer et où (ϵ_t) est supposé être un bruit blanc gaussien de variance finie, que l'on cherchera également à estimer. Le terme $G(\theta)$ contrôle les poids polynômiaux qui permette le mélange des fréquences. En effet, la spécification MIDAS consiste à lisser les valeurs passées des valeurs de $(\hat{F}_t^{(m)})$ en utilisant le polynôme $G(\theta)$ de la forme suivante:

$$G(\theta) = \sum_{k=1}^{K} g_k(\theta) L^{(k-1)/m} \tag{26}$$

où K est le nombre de points sur lesquels le lissage s'opère, L l'opérateur retard tel que, pour toute variable mensuelle $x_t^{(m)}$, $L^{\tau/m} x_t^{(m)} = x_{t-\tau/m}^{(m)}$ et $g_K(.)$ est la fonction de poids, qui peut prendre diverses formes. Comme dans Ghysels *et alii* (2007), on implémente en général un polynôme d'Almon à deux paramètres $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ tel que :

$$g_k(\theta) \equiv g_k(\theta_1, \theta_2) = \frac{\exp\left(\theta_1 k + \theta_2 k^2\right)}{\sum_{k=1}^{K} \exp\left(\theta_1 k + \theta_2 k^2\right)} \tag{27}$$

Le paramètre θ fait partie intégrante du problème d'estimation. Il est influencé par l'information contenue dans les K dernières valeurs de $(\hat{F}_t^{(m)})$, la taille de la fenêtre K étant un paramètre exogène. D'autres spécifications peuvent être considérées dans la littérature pour l'équation (25), notamment en ajoutant des variables explicatives mensuelles ou des termes autorégressifs pour la variable cible (y_t). De même, d'autres fonctions de poids peuvent être considérées.

En termes d'application, Marcellino et Schumacher (2010) proposent une approche dans laquelle ils estiment d'abord des facteurs mensuels, à partir d'une base de données de 111 variables représentatives de l'économie allemande, puis utilisent ces facteurs en prévision du PIB trimestriel allemand à l'aide d'une régression MIDAS (approche dite *factor-MIDAS*). Les auteurs montrent l'utilité d'une telle approche pour exploiter au mieux l'information la plus récente dans une optique de prévision macroéconomique à court terme. S'agissant de l'approche MIDAS en elle-même, des exemples d'application, par exemple en termes de prévision, peuvent être trouvés dans les articles de Clements et Galvao (2008) ou Ferrara et Marsilli (2013).

4 L'estimation des modèles à facteurs pour N grand

Dans cette partie, nous présentons les méthodes d'estimation des modèles à facteurs, statiques et dynamiques, lorsque le nombre de variables est élevé (N grand). Dans ce cas, les méthodes usuelles fondées sur la maximisation de la vraisemblance se heurtent au problème de la dimension du paramètre à estimer.

4.1 Les modèles à facteurs statiques : l'approche de Stock et Watson (2002)

Un des premiers modèles à facteurs approchés est celui proposé par Stock et Watson (2002) (SW), qui est fondé sur une ACP statique. Le recours à l'ACP est motivé par le fait qu'elle permet d'estimer à la fois les paramètres et les facteurs du modèle donné par l'équation (1) en maximisant la variance expliquée des variables initiales, pour un petit nombre r de facteurs statiques

(F_t). L'objectif principal de l'approche de SW est d'approcher les facteurs par une combinaison linéaire des données $\widehat{F}_{j,t} = \widehat{W}_j' X_t$, pour $j = 1,...,r$, qui maximise la variance des facteurs estimés $\widehat{W}_j' \widehat{\Sigma}_x \widehat{W}_j$, où $\widehat{\Sigma}_x = (1/T) \sum_{t=1}^{T} X_t X_t'$ est la matrice des variances-covariances empiriques du vecteur de données initiales centrées-réduites X_t.

Sous l'hypothèse de normalisation suivante : $\widehat{W}_j' \widehat{W}_{j'} = 1$ pour $j = j'$ et $\widehat{W}_j' \widehat{W}_{j'} = 0$ pour $j \neq j'$, le problème de maximisation peut alors être transformé en la résolution d'un problème de valeurs propres :

$$\widehat{\Sigma}_x \widehat{W}_j = \widehat{\mu}_j \widehat{W}_j, \tag{28}$$

où $\widehat{\mu}_j$ est la j-ième valeur propre et $\widehat{W}_j$ est le vecteur propre qui lui est associé de dimension $(N \times 1)$. Une fois les N valeurs propres maximales calculées, elles sont classées dans un ordre décroissant. Ensuite les vecteurs propres sont à leur tour classés dans un ordre décroissant par rapport aux r plus grandes valeurs propres. Les facteurs proposés par SW se présentent alors comme suit :

$$F_t^{SW} = \widehat{W}' X_t, \tag{29}$$

où $\widehat{W}$ est une matrice de dimension $(N \times r)$ des vecteurs propres empilés $\widehat{W} = (\widehat{W}_1, ..., \widehat{W}_r)$[8].

Cependant l'approche de Stock et Watson ne permet pas d'exploiter les différentes dynamiques pouvant exister entre les variables utilisées. Afin de tenir compte de cette structure dynamique dans les modèles à facteurs, plusieurs alternatives au modèle à facteurs statiques ont été proposées dans la littérature. Plus précisément, il existe principalement deux types d'approches ou de modèles à facteurs dynamiques. Le premier type de modèle à facteurs dynamiques est fondé sur une représentation espace-état des modèles dans le domaine temporel. Ils ont été développés par Doz, Giannone et Reichlin (2011, 2012). Le deuxième type de modèle est fondé sur le domaine spectral et a été proposé par Forni, Hallin, Lippi et Reichlin (2004, 2005). Dans ce qui suit, nous présentons les stratégies d'estimation de ces différents modèles à facteurs dynamiques.

[8]Stock et Watson (1998) ont développé des résultats théoriques relatifs à cette méthodologie.

4.2 Les modèles à facteurs dynamiques

4.2.1 Approche dans le domaine temporel

Doz, Giannone et Reichlin (2011, 2012) (DGR) ont proposé un modèle à facteurs dynamiques qui possède la capacité de se représenter sous une forme espace-état. Plus précisément, DGR (2011, 2012) estiment leur modèle à facteurs dynamiques par deux approches différentes. La première est dite approche en deux étapes (DGR, 2011) et la seconde est fondée sur le pseudo-maximum de vraisemblance (DGR, 2012).

Selon DGR (2011), pour un nombre de facteurs r et un nombre de chocs dynamiques q, l'estimation s'effectue selon deux étapes. Dans une première étape :

1. $\widehat{F}_t$ est estimé par le biais d'une ACP, comme une estimation initiale ;

2. ensuite, les équations (6) et (11) sont estimées en utilisant le facteur estimé à l'étape précédente, $\widehat{F}_t$, pour obtenir à la fois $\widehat{\lambda}_i^*(L)$ et la matrice des variances-covariances des résidus $\widehat{\xi}^*$, notée $\widehat{\Sigma}_{\xi^*}$. Afin d'obtenir une estimation de $C(L)$, apparaissant dans l'équation (10), DGR (2011) appliquent une décomposition de valeurs propres à la matrice $\widehat{\Sigma}_{\xi^*}$ en tenant compte du nombre de chocs dynamiques q. On note M une matrice de dimension $(r \times q)$ correspondant aux q plus grandes valeurs propres et P une matrice de dimension $(q \times q)$ contenant à son tour les plus grandes valeurs propres dans sa diagonale et zéro ailleurs. Alors l'estimation de $C(L)$ est obtenue par $\widehat{C}(L) = M \times P^{-1/2}$.

Dans une seconde étape, les coefficients et les paramètres du système décrit par les équations (6) et (11) sont considérés connus et fournis par la première étape. Le modèle est alors écrit sous une forme espace-état et on applique le filtre de Kalman afin d'obtenir de nouvelles estimations des facteurs.

Dans leur approche alternative, DGR (2012) estiment un modèle à facteurs dynamiques approchés en utilisant la méthode du pseudo-maximum de vraisemblance[9]. L'objectif principal de cette approche est de considérer le modèle à fac-

[9] Jungbacker et Koopman (2008) ont proposé de nouveaux résultats relatifs à l'estimation d'un modèle à facteurs dynamiques par la méthode du maximum de vraisemblance et une méthode bayésienne fondée sur les chaînes de Markov. Jungbacker *et alii* (2011) ont récemment adapté leur approche dans le cadre de données manquantes.

teurs stricts comme une mauvaise spécification du modèle à facteurs approchés et d'analyser les propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance des facteurs sous cette mauvaise spécification. Cet estimateur est appelé le pseudo-maximum de vraisemblance au sens de White (1982). En analysant les propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance à travers plusieurs sources de mauvaises spécifications, telles que l'omission d'une corrélation sérielle des observations ou d'une corrélation entre les composantes idiosyncratiques, DGR (2012) prouvent que ces mauvaises spécifications n'affectent pas la robustesse des facteurs communs, en particulier pour N et T assez grands. Plus précisément, cet estimateur est une alternative paramétrique valide à l'estimateur issu d'une ACP. Le modèle défini à travers les équations (6) et (11) peut être mis sous une forme espace-état, avec un nombre d'états égal au nombre de facteurs communs r. Notons que l'estimation des paramètres du modèle, en particulier des facteurs communs, par le pseudo-maximum de vraisemblance peut être approximée par leur valeur anticipée, en utilisant le filtre de Kalman[10].
Ces modèles à facteurs dynamiques sont également appelés modèles à facteurs dynamiques restreints (*restricted dynamic factor models*) car les r facteurs statiques sont engendrés par un nombre q de facteurs dynamiques, avec $q \leq r$ (Forni *et alii*, 2005 ; Hallin et Liska, 2007).

Kapetanios et Marcellino (2004) ont également proposé une approche fondée sur une représentation espace-état. Leur approche est fondée sur des plongements dans des sous-espaces spécifiques dans lesquels les facteurs sont estimés. Cet algorithme de sous-espace permet d'estimer les facteurs sans avoir à spécifier ni à identifier le modèle dans sa représentation espace-état dans sa totalité.

4.2.2 Approche dans le domaine des fréquences

Afin d'estimer les facteurs dynamiques, Forni, Hallin, Lippi et Reichlin (2000, 2003, 2004, 2005) [FHLR] ont proposé dans une série d'articles une ACP dynamique dans le domaine des fréquences, aussi appelée modèle à facteurs dynamiques généralisés (*Generalized Dynamic Factors*)[11]. Leur modèle a pour but

[10] La vraisemblance peut être maximisée via l'algorithme EM qui nécessite, à chaque itération, l'utilisation du filtre de Kalman.

[11] FHLR généralisent le modèle à facteurs dynamiques de Sargent et Sims (1977) et Geweke (1977) en levant l'hypothèse d'orthogonalité des composantes idiosyncratiques (voir également Forni, Giannone, Lippi et Reichlin, 2009). Hallin et Liska (2011) ont récemment adapté ces modèles pour estimer des facteurs communs spécifiques à des « blocs » de données, c'est-à-dire

d'identifier une structure dynamique d'un modèle à facteurs. Le modèle à facteurs dynamiques est donné par les équations (6) et (7). La méthode proposée par FHLR permet, dans une première étape, d'estimer les facteurs dynamiques, puis les facteurs statiques sont obtenus à partir de cette estimation des facteurs dynamiques dans une seconde étape. L'approche proposée par FHLR vise à estimer à la fois les facteurs dynamiques et leurs covariances. Cette estimation est effectuée afin de maximiser la variance de la composante commune sous certaines restrictions d'orthogonalité. Le programme d'optimisation est assimilé à un problème de détermination des valeurs propres dynamiques de la matrice de densité spectrale du vecteur des variables observées. La matrice spectrale $I_x(\omega)$ de X_t est estimée en utilisant une représentation dans le domaine des fréquences des séries temporelles pour chaque fréquence ω dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. La matrice spectrale estimée contient à la fois les informations relatives à la corrélation croisée entre les variables, ainsi qu'à leurs relations dynamiques. Ainsi, on note $\widehat{\Sigma}_x(\tau)$ la matrice d'autocovariance estimée entre X_t et $X_{t-\tau}$ pour un certain retard τ. La densité spectrale estimée du vecteur des variables observées est donnée par :

$$\widehat{I}_x(\omega_h) = \sum_{\tau=-H}^{H} \widehat{\Sigma}_x(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{H+1}\right) e^{-i\tau\omega_h} \tag{30}$$

pour chaque fréquence de Fourier $\omega_h = 2\pi h/(2H+1)$ et pour chaque $h = 0, ..., 2H$, i représentant ici le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$. Pour chaque fréquence ω_h, les valeurs propres et les vecteurs propres dynamiques issus de $\widehat{I}_x(\omega_h)$ sont calculés. Les vecteurs propres sont classés dans un ordre décroissant. Plus précisement, les vecteurs propres $\widehat{P}_l(\omega_h)$, de dimension $(N \times 1)$, sont collectés pour $l = 1, .., q$ (les q valeurs propres les plus élevées). Pour revenir dans le domaine temporel, les vecteurs propres sont obtenus à partir de la transformation de Fourier inverse :

$$\widehat{P}_l(L) = \sum_{\tau=-H}^{H} \widehat{P}_{l,\tau} L^{\tau}, \qquad \text{avec } \widehat{P}_{l,\tau} = \frac{1}{2H+1} \sum_{h=0}^{2H} \widehat{P}_l(\omega_h) e^{i\tau\omega_h} \tag{31}$$

pour $\tau = -H, ..., H$ et $j = 1, ..., q$. La j-ième composante principale dynamique, $\widehat{F}_{j,t}$, est alors donnée par la j-ième composante de $\sum_{l=1}^{q} \widehat{P}'_l(L)\widehat{P}_l(L)X_t$.

Ainsi les composantes principales dynamiques sont obtenues à partir d'une décomposition de la matrice de densité spectrale en vecteurs et valeurs propres dynamiques. Cette décomposition permet aussi de départager la matrice

de grands sous-panels de variables.

de densité spectrale en une matrice de densité spectrale des composantes communes $I_\chi(\omega)$ et une matrice de densité spectrale des composantes idiosyncratiques $I_\xi(\omega)$.

En outre, l'estimateur du domaine des fréquences se résume à un filtre symétrique. Ceci présente des problèmes en fin d'échantillon, en particulier lorsque les observations futures sont utiles pour estimer les composantes principales. Afin de pallier ce problème, FHLR (2005) suggèrent un raffinement de leur procédure qui conserve les avantages de l'approche dynamique, tandis que l'estimation des composantes communes est fondée sur un filtre asymétrique.[12] Á travers cette procédure, l'espace des facteurs est approximé en agrégeant les r facteurs statiques au lieu des q principales composantes dynamiques. Cependant, la moyenne issue des r facteurs statiques contemporains est fondée sur l'information provenant de l'approche dynamique. L'estimation du modèle consiste alors à maximiser la variance des composantes communes ou à minimiser la variance des composantes idiosyncratiques. Ainsi, un estimateur convergent de la matrice de densité spectrale de la composante commune est donné par :

$$\widehat{I}_\chi(\omega) = \widehat{P}(\omega)\Omega(\omega)\widehat{P}'(\omega), \tag{32}$$

où $\Omega(\omega)$ est une matrice diagonale de dimension $(q \times q)$ contenant les q plus grandes valeurs propres dynamiques sur la diagonale et $\widehat{P}(\omega) = (\widehat{P_1}(\omega), ..., \widehat{P_q}(\omega))$ est une matrice de dimension $(N \times q)$ contenant les vecteurs propres correspondants à la fréquence ω. On en déduit alors la matrice de densité spectrale de la composante idiosyncratique :

$$\widehat{I}_\xi(\omega) = \widehat{I}_x(\omega) - \widehat{I}_\chi(\omega) \tag{33}$$

Cette estimation dans le domaine des fréquences se mène en deux étapes. La première est fondée sur l'approche dynamique, à partir de laquelle on obtient respectivement les matrices de variances-covariances des composantes communes $\widehat{I}_\chi(\omega)$ et idiosyncratiques $\widehat{I}_\xi(\omega)$ estimées par le biais d'une transformation de Fourier inverse. Ainsi, la matrice des variances-covariances des composantes communes est estimée comme suit :

$$\widehat{\Sigma}_\chi(\tau) = \frac{1}{2H+1}\sum_{h=0}^{2H} \widehat{I}_\chi(\omega_h)e^{i\tau\omega_h} \tag{34}$$

[12] Voir également Forni et Lippi (2011).

pour $\tau = -H, \ldots, H$. La matrice des variances-covariances des composantes idiosyncratiques est estimée de la même manière :

$$\widehat{\Sigma}_{\xi}(\tau) = \frac{1}{2H+1} \sum_{h=0}^{2H} \widehat{I}_{\xi}(\omega_h) e^{i\tau\omega_h} \tag{35}$$

Dans une seconde étape, cette information est utilisée afin de construire l'espace des facteurs par le biais des r moyennes agrégées. Plus précisément, les variables sont pondérées par rapport au ratio variance commune sur variance idiosyncratique, obtenu à l'aide des matrices de variances-covariances estimées lors de la première étape. Ces r moyennes agrégées se définissent comme étant les solutions d'un problème de composantes principales généralisées et elles ont l'avantage de minimiser les erreurs quadratiques idiosyncratiques des facteurs communs, en ne sélectionnant que les variables ayant le ratio variance commune sur variance idiosyncratique le plus élevé. Le nombre de ces moyennes agrégées est égale à $r = s(p+1)$, qui représente le rang de la matrice de densité spectrale des facteurs communs, où s indique le nombre de retards pour $\lambda_i^*(L)$ dans l'équation (10). FHLR (2005) montrent qu'afin de déterminer le nombre des moyennes agrégées r, le problème de maximisation peut être converti en un problème de valeurs propres généralisées :

$$\hat{\Sigma}_{\chi}(0)\hat{Z}_j = \hat{\mu}_j \hat{\Sigma}_{\xi}(0)\hat{Z}_j \tag{36}$$

où $\hat{\mu}_j$ est la j-ième valeur propre généralisée, $\hat{Z}_j$ est son vecteur propre associé de dimension $(N \times 1)$, et $\hat{\Sigma}_{\chi}(0)$ et $\hat{\Sigma}_{\xi}(0)$ sont respectivement les matrices de variances-covariances contemporaines ($\tau = 0$) des composantes communes et idiosyncratiques. En outre, FHLR (2005) imposent la normalisation suivante $\hat{Z}_j'\hat{\Sigma}_{\xi}(0)\hat{Z}_{j'} = 1$ pour $j = j'$ et $\hat{Z}_j'\hat{\Sigma}_{\xi}(0)\hat{Z}_{j'} = 0$ pour $j \neq j$. Ensuite, les valeurs propres sont classées par ordre décroissant et les facteurs obtenus correspondent au produit des r vecteurs propres correspondant aux valeurs propres les plus élevées et du vecteur X_t. L'estimateur proposé par FHLR (2005) se présente comme suit :

$$F_t^{FHLR} = \widehat{Z'} X_t \tag{37}$$

où $\widehat{Z} = (\widehat{Z_1}, ..., \widehat{Z}_r)$ est une matrice de dimension $(N \times r)$ des vecteurs propres empilés.

En conclusion de cette partie, on notera que les méthodes d'estimation proposées sont relativement récentes et la littérature manque encore de recul pour se permettre de privilégier systématiquement une méthode par rapport à l'autre. De par sa simplicité d'implémentation, l'approche de Stock et Watson (2002) est forcément attractive et les résultats empiriques, notamment dans un cadre prévisionnel, soulignent que cette approche ne conduit pas à des résultats significativement moins bons que les autres approches en termes d'erreur de prévision (voir sur ce point les travaux récents de D'Agostino et Giannone, 2012, ou Barhoumi, Darné et Ferrara, 2013).

La littérature récente s'est également intéressée à l'estimation des modèles à facteurs dans un cadre bayesien. Cette approche permet de réduire l'incertitude sur les paramètres en effectuant des hypothèses de lois de distribution *a priori* sur ces paramètres. A cet égard, nous renvoyons le lecteur intéressé à Kose, Otrok et Whiteman (2003, 2008) ou Lopes et West (2004), par exemple.

Enfin, les propriétés asymptotiques des estimateurs présentés précédemment sont prouvées sous l'hypothèse simple « N et T tendent vers l'infini » dont l'interprétation est quelquefois assez vague. Bai (2003) et Forni *et alii* (2004) soulignent que les propriétés asymptotiques, telle que la convergence, tiennent le long des trajectoires spécifiques $\{(N, T(N)); N \in \mathbf{N}\}$. Par exemple, une propriété qui tient pour $\min(N, T)$ tient le long de toute trajectoire $(N, T(N))$, tandis qu'une propriété qui tient pour $N = O(T^k)$ nécessite que le nombre d'observations T soit au moins d'ordre $N^{1/T}$. En fait, il existe trois concepts de limites : (i) séquentielles, (ii) par paires et (iii) simultanées. Soit $g(N, T)$ une fonction que l'on cherche à étudier. La limite séquentielle fait tendre N et T vers l'infini l'un après l'autre. Une limite par paire ne fait tendre (N, T) vers l'infini que le long d'une trajectoire particulière, que l'on peut noter $\lim_{N,T\to\infty} g(N, T(N))$. Une limite simultanée autorise (N, T) à augmenter le long de toutes les trajectoires possibles : $\lim_{N,T\to\infty} g(N, T)$. On peut remarquer que l'existence d'une limite simultanée implique l'existence d'une limite par paire et séquentielle, mais que la réciproque est fausse. Une autre approche, utilisant la théorie des matrices aléatoires, postule que N et T tendent vers l'infini avec $N/T \to c \in (0, \infty)$, où c est une constante. Pour une discussion plus détaillée, le lecteur peut se référer, par exemple, à Bai et Ng (2008b) et Harding (2009).

5 Le choix du nombre de facteurs

Une étape importante dans l'analyse statistique des modèles à facteurs (statiques et dynamiques) est l'identification préliminaire du nombre de facteurs. Un certain nombre de travaux se sont intéressés au problème de la détermination du nombre de facteurs. Par exemple, Forni et Reichlin (1998) suggèrent une approche graphique pour identifier le nombre de facteurs lorsque $N \to \infty$ et T est fixé mais aucune théorie n'est proposée. Stock et Watson (1998) proposent une modification du critère BIC pour sélectionner le nombre optimal de facteurs en prévision lorsque $N, T \to \infty$ avec $\sqrt{N}/T \to \infty$. Néanmoins, leur critère est restrictif car, d'une part, il requiert que $N \gg T$, d'autre part, il n'est approprié que dans un cadre prévisionnel. Forni *et alii* (2000) considèrent une version multivariée du critère AIC mais aucune propriété théorique ou empirique n'est connue pour leur critère.

Dans cette partie, nous présentons les critères les plus utilisés dans la littérature empirique, à savoir les critères de Bai et Ng (2002) et Alessi *et alii* (2010) pour les modèles à facteurs statiques et ceux de Stock et Watson (2005a), Amengual et Watson (2007), Bai et Ng (2007), Breitung et Pigorsch (2010) et Hallin et Liska (2007) pour les modèles à facteurs dynamiques.

5.1 Le choix du nombre de facteurs pour les modèles à facteurs statiques

Afin de spécifier le nombre de facteurs, Bai et Ng (2002) ont suggéré l'utilisation des critères d'information afin de sélectionner le nombre optimal de facteurs statiques r, lorsque N et T tendent vers l'infini. Bai et Ng (2002) ont proposé des critères d'information fondés sur la qualité d'ajustement du modèle aux données mesurée par la variance $V(j, F)$ telle que :

$$V(j, F) = (NT)^{-1} \sum_{t=1}^{T} \left(X_t - \widehat{\Lambda}\widehat{F}_t \right)^2, \tag{38}$$

où j est un nombre donné de facteurs tels que $\widehat{F}_t = (\widehat{F}_{1t}, \ldots, \widehat{F}_{jt})'$. Ainsi, si le nombre de facteurs j augmente, la variance des facteurs augmente mécaniquement et la somme des carrés des résidus diminue à son tour. Bai et Ng (2002) suggèrent alors d'introduire une fonction de pénalité dans le critère à optimiser et proposent alors les trois critères suivants, correspondant à des fonctions de pénalité différentes :

$$IC_1(j) = \ln(V(j,F)) + j.\left(\frac{N+T}{NT}\right)\ln\left(\frac{NT}{N+T}\right), \tag{39}$$

$$IC_2(j) = \ln(V(j,F)) + j.\left(\frac{N+T}{NT}\right), \tag{40}$$

$$IC_3(j) = \ln(V(j,F)) + j.(\ln C_{NT}^2/C_{NT}^2), \tag{41}$$

où $C_{NT} = \min\{\sqrt{N}, \sqrt{T}\}$ et ln désigne le logarithme népérien. L'estimation du nombre de facteurs r est obtenue par la minimisation des critères d'information pour j variant de $j = 0$ à $j = r_{\max}$, où $r_{\max}$ est le nombre maximal de facteurs statiques. Ces critères reflètent l'arbitrage entre la bonne qualité d'ajustement et le risque de surajustement[13]. Bai et Ng (2002) montrent que leurs critères sont robustes en présence d'une composante hétéroscédastique dans les dimensions temporelle et croisée entre variables, mais également en présence de dépendances sérielle et croisée faibles.

Par la suite, Alessi *et alii* (2010) ont étendu ce critère en modifiant la puissance de la fonction de pénalité qui apparaît dans les trois critères précédents données par les équations (39)-(40)-(41). Alessi *et alii* (2010) proposent une alternative aux critères proposés par Bai et Ng (2002) en multipliant la fonction de pénalité par une constante c positive, suggérée à l'origine par Hallin et Liska (2007), représentant la puissance de la fonction de pénalité. Les auteurs proposent ainsi les deux critères suivants :

$$\begin{aligned} IC_1^*(j) &= \ln(V(j,F)) + c.j.\left(\frac{N+T}{NT}\right)\ln\left(\frac{NT}{N+T}\right) && (42) \\ IC_2^*(j) &= \ln(V(j,F)) + c.j.\left(\frac{N+T}{NT},\right) && (43) \end{aligned}$$

où $V(j,F)$ est donnée par l'équation (38). L'estimation du nombre r de facteurs est obtenue par la minimisation des critères d'information IC_1^* et IC_2^* pour j variant de $j = 0$ à $j = r_{\max}$, où $r_{\max}$ est le nombre maximal de facteurs statiques.

[13] Bai et Ng (2002) proposent également une autre classe de critères d'information pour lesquels la variance $V(j,F)$ remplace $\ln(V(j,F))$ dans les équations (39), (40) et (41). Bai et Ng (2002, Théorème 2) donnent les résultats de la convergence de ces critères lorsque N et T tendent vers l'infini.

La procédure de sélection du nombre de facteurs statiques dépend à la fois de la variance du nombre de facteurs estimés $V_c(r)$ (pour N et T qui tendent vers l'infini) et de la constante $c \in [0, c_{\max}]$. Alessi *et alii* (2010) suggèrent d'estimer cette variance $V_c(r)$ en réitérant la procédure d'estimation de r sur un nombre fini de sous-ensembles des N variables initiales, en faisant varier également le nombre d'observations T.

On notera également que Kapetanios (2010) a récemment proposé une méthode concurrente au critère d'information pour estimer le nombre de facteurs statiques, qui repose sur la théorie des matrices aléatoires. Son approche est fondée sur une série de tests sur les plus grandes valeurs propres de la matrice des variances-covariances des données initiales, que nous avons notée Σ_X. Une autre procédure alternative a été suggérée par Yao et Pan (2008) et Onatski (2010).

5.2 Le choix du nombre de facteurs pour les modèles à facteurs dynamiques

5.2.1 Le critère de Bai et Ng (2007)

Dans le cadre des modèles à facteurs dynamiques, le nombre de chocs dynamiques q (pour l'estimation en composantes principales dynamiques des facteurs et leur représentation espace-état) peut être déterminé à partir du critère d'information de Bai et Ng (2007). Ce critère est obtenu en considérant les r facteurs statiques estimés comme donnés et, ensuite, en estimant un modèle VAR d'ordre p sur ces facteurs, où l'ordre p est sélectionné par le critère BIC. Par la suite, une décomposition spectrale de la matrice des variances-covariances des résidus estimés du modèle VAR, notée $\widehat{\Sigma}_\varepsilon$ de dimension $(r \times r)$, est calculée, puis on récupère la j-ième valeur propre ordonnée $\widehat{c}_j$, où $\widehat{c}_1 > \widehat{c}_2 \geq ...\widehat{c}_r \geq 0$. Au final, pour $l = 1, ..., r-1$, Bai et Ng (2007) proposent les deux quantités suivantes :

$$
\begin{aligned}
\widehat{D}_{1,l} &= \left(\frac{\widehat{c}_{l+1}}{\sum_{j=1}^{r} \widehat{c}_j} \right)^{1/2} \\
\widehat{D}_{2,l} &= \left(\frac{\sum_{j=l+1}^{r} \widehat{c}_j}{\sum_{j=1}^{r} \widehat{c}_j} \right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

où $\widehat{D}_{1,l}$ représente une mesure de la contribution marginale de la $l+1^{me}$ valeur

propre et $\widehat{D}_{2,l}$ une mesure de la contribution cumulée des valeurs propres, sous les hypothèses que $\widehat{\Sigma}_\varepsilon$ est la matrice unité de dimension $(r \times r)$ et que $c_l = 0$ pour $l > q$[14].
Ainsi, selon la mesure de la contribution marginale choisie, le nombre de facteurs dynamiques q est obtenu en minimisant :

$$\left\{ l \quad \text{tel que : } \widehat{D}_{1,l} \leq \frac{c}{\min\left[n^{\frac{2}{5}}, T^{\frac{2}{5}}\right]} \right\},$$

ou alors :

$$\left\{ l \quad \text{tel que : } \widehat{D}_{2,l} \leq \frac{c}{\min\left[n^{\frac{2}{5}}, T^{\frac{2}{5}}\right]} \right\}.$$

Bai et Ng (2007) suggèrent d'utiliser $c = 1$ en se fondant sur des simulations de Monte-Carlo.

En pratique, ces différents critères sont utilisés en trois temps :

1. on utilise d'abord l'un des criteres de Bai et Ng (2002) pour déterminer le nombre de facteurs optimal $r \in \{1, \ldots, r_{max}\}$ dans un cadre statique[15] ;

2. on estime ensuite un VAR(p) sur ces r facteurs estimés et l'on choisit l'ordre p du VAR de manière à minimiser le critère BIC ;

3. enfin, on applique les critères de Bai et Ng (2007) sur la matrice des variances-covariances ou de corrélation des résidus (ε_t) du VAR(p) pour obtenir le nombre de facteurs dynamiques optimal q.

5.2.2 Les critères de Stock et Watson (2005a) et Amengual et Watson (2007)

Stock et Watson (2005a) et Amengual et Watson (2007) montrent que l'estimateur de Bai et Ng (2002) peut être utilisé pour estimer le nombre de facteurs dynamiques. Pour cela, ils proposent d'appliquer cet estimateur aux résidus issus de la projection des données observées sur les valeurs retardées des facteurs statiques, c'est-à-dire sur $\hat{\nu}_t = X_t - \sum_{\tau=1}^{p} \Lambda\Phi(L)F_{t-\tau}$. Ils proposent deux manières

[14] Bai et Ng (2007) montrent que $\widehat{D}_{1,l}$ et $\widehat{D}_{1,l}$ convergent vers zéro lorsque $l > q$.
[15] Le critère IC_2 est le plus utilisé en pratique.

d'estimer ces résidus (ν_t) :

$$\begin{aligned}\widehat{\nu}_t^A &= X_t - \sum_{\tau=1}^{p} \widehat{\Lambda}\widehat{\phi}_\tau \widehat{F}_{t-\tau} \\ \widehat{\nu}_t^B &= X_t - \sum_{\tau=1}^{p} \widehat{\Pi}_\tau \widehat{F}_{t-\tau}\end{aligned}$$

où $(\widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_2, \ldots, \widehat{\phi}_p)$ sont les estimateurs des moindres carrés ordinaires de la régression de $\widehat{F}_t$ sur $(\widehat{F}_{t-1}, \ldots, \widehat{F}_{t-p})$ et $(\widehat{\Pi}_1, \widehat{\Pi}_2, \ldots, \widehat{\Pi}_p)$ les estimateurs des moindres carrés ordinaires de la régression de X_t sur $(\widehat{F}_{t-1}, \ldots, \widehat{F}_{t-p})$.

5.2.3 Le critère de Breitung et Pigorsch (2010)

Breitung et Pigorsch (2010) proposent également deux critères d'information pour sélectionner le nombre de facteurs dynamiques. Leurs critères sont fondés sur une analyse de corrélations canoniques de facteurs statiques (obtenus à partir d'une analyse en composantes principales) et dépendent de l'estimation d'un modèle VAR(p) sur ces facteurs, où l'ordre p est sélectionné par le critère BIC. Le premier critère est fondé sur la statistique suivante :

$$\zeta(q^*) = \tilde{C}_{NT}^{2-\delta} \sum_{j=1}^{r-q^*} (1 - \tilde{\lambda}_j)$$

où $\tilde{C}_{NT}^{2-\delta} = (2-\delta)N^{-1} + (2-\delta)T^{-1}$, avec $0 < \delta < 2$, et $\tilde{\lambda}_j$ sont des valeurs issues de la résolution du problème suivant $|\tilde{\lambda}_j \tilde{S}_{00} - \tilde{S}_{01}\tilde{S}_{11}^{-1}\tilde{S}_{01}'| = 0$, avec $\tilde{S}_{00} = \sum_{t=\tau+1}^{T} \hat{F}_t \hat{F}_t'$, $\tilde{S}_{01} = \sum_{t=\tau+1}^{T} \hat{F}_t \hat{G}_{t-1}'$, $\tilde{S}_{11} = \sum_{t=\tau+1}^{T} \hat{G}_{t-1}\hat{G}_{t-1}'$, et $\hat{G}_{t-1} = \left[\hat{F}_{t-1}', \ldots, \hat{F}_{t-\tau}'\right]$ des vecteurs à τ retards. Le nombre de facteurs dynamiques peut être estimé par un grand nombre de q^* issus de cette séquence $q^* = r-1, r-2, \ldots, 0$, où $\zeta(q^*)$ est une statistique plus grande que le niveau du seuil κ, soit :

$$q = \max\{q^* \quad \text{tel que :} \quad \zeta(q^*) > \kappa\}$$

Breitung et Pigorsch (2010) suggèrent de retenir les valeurs suivantes des paramètres : $\tau = 1$, $\delta = 0,5$ et $\kappa = 1$.

Le second critère est fondé sur la statistique suivante :

$$LR(q^*) = T \sum_{j=r-q^*+1}^{r} \tilde{\lambda}_j$$

où l'hypothèse nulle est $\mathrm{H}_0 : q^* = q$ contre l'alternative $\mathrm{H}_1 : q^* < q$.

5.2.4 Le critère de Hallin et Liska (2007)

Hallin et Liska (2007) développent un critère d'information pour les modèles à facteurs dynamiques généralisés. Ce critère est fondé sur la matrice de densité spectrale des observations. Il se présente comme suit :

$$IC_{2,N}^{T}(j) = \ln\left[\frac{1}{N}\sum_{s=j+1}^{N}\frac{1}{2M_T+1}\sum_{h=-M_T}^{M_T}\lambda_{N_s}^{T}(\omega_h)\right] + c.j.p(N,T), \qquad (44)$$

avec $0 \leq j \leq q_{\max}$, $\omega_h = \pi h/(M_T + \frac{1}{2})$ pour $h = -M_T, \ldots, M_T$ avec $M_T > 0$ paramètre de troncature, c est une constante positive telle que $c = [0,01; 0,02; \ldots; 3,00]$, où $N_s < N$ est le nombre de variables contenues dans un sous-ensemble donné et où $p(N,T)$ est une fonction de pénalité[16] telle que :

$$p(N,T) = \Big(-M_T^{-2} + M_T^{1/2}T^{-1/2} + N^{-1}\Big) \times \ln\Big(\min[N, M_T^2, M_T^{-1/2}T^{1/2}]\Big)$$

Les valeurs propres $\lambda_{N_s}^{T}$ sont issues de $\hat{I}_x(\omega)$, qui représente l'estimateur de la matrice de densité spectrale de X_t avec $\omega \in [-\pi, \pi]$. Le nombre de facteurs estimés est alors donné par :

$$q = \underset{0 \leq j \leq q_{\max}}{\operatorname{argmin}}\, IC_{2,n}^{T}(j)$$

La procédure de sélection du nombre de facteurs dynamiques est similaire à celle proposée par Alessi *et alii* (2008), c'est-à-dire en examinant la variance du nombre de facteurs estimés, $V_c(r)$ pour n et T tendant vers l'infini et pour un intervalle de valeurs pour la constante c. Dans leur illustration numérique, Hallin et Liska (2007) proposent de retenir $M_T = [0,75\sqrt{T}]$ et $q_{\max} = 13$.

[16] Hallin et Liska (2007) proposent également deux autres fonctions de pénalité. Onatski (2009) suggère des tests alternatifs dans le cadre de modèles à facteurs dynamiques approchés. Jacobs et Otter (2008) proposent un test fondé sur une procédure de corrélations canoniques pour déterminer simultanément le nombre de facteurs dynamiques q et l'ordre de retard p dans le modèle à facteurs dynamiques mais pour N et T fixés.

6 Résultats récents de la littérature empirique

Les applications des modèles à facteurs dynamiques sont nombreuses dans la littérature économique empirique. On peut citer, par exemple, les modèles de prix des actifs (Ross, 1976), la théorie du consommateur (Gorman, 1981 ; Lewbel, 1991), l'évaluation de performance et les mesures de risque en finance (Campbell *et alii*, 1997). Dans cette partie, nous présentons quelques applications récentes de ces modèles à facteurs, qui viennent souligner l'intérêt de cette approche, à savoir (i) la construction d'indicateurs conjoncturels, (ii) la prévision macroéconomique et (iii) les analyses macroéconomiques et de politique monétaire.

6.1 Outils pour le suivi conjoncturel

Les modèles à facteurs dynamiques constituent une approche bien adaptée pour développer des indicateurs d'activité économique à partir de la masse d'information dont disposent les conjoncturistes. En effet, ces modèles permettent de synthétiser de grandes bases de données en un indicateur composite censé refléter l'information la plus pertinente, disponible à une date donnée.

Un des indicateurs les plus connus auquel se réfèrent les conjoncturistes travaillant sur l'économie américaine est l'Indice d'Activité Nationale de la *Federal Reserve Bank* de Chicago (*Chicago Fed National Activity Index*, CFNAI) développé à partir de l'approche factorielle de Stock et Watson (1999). Cet indicateur est fondé sur 85 séries mensuelles représentatives de l'économie américaine, couvrant la production, les revenus, l'emploi, la consommation des ménages, le marché immobilier, les ventes, les stocks et les carnets de commande. Le CFNAI correspond au premier facteur estimé par une analyse en composantes principales, centré et réduit. Ainsi, une valeur proche de zéro signifie que l'activité est proche de sa tendance de long terme. De plus, le CFNAI peut être utilisé pour détecter les récessions américaines en utilisant des seuils estimés sur le passé. De son côté, la *Federal Reserve Bank* de Philadelphie publie toutes les semaines un indicateur d'activité économique dont la périodicité est journalière. Cet indicateur est élaboré à partir du modèle à périodicités multiples présenté dans l'article d'Aruoba, Diebold et Scotti (2009) et intègre des données de périodicités journalière, hebdomadaire, mensuelle et trimestrielle. De par sa périodicité élevée, cet indicateur est intéressant pour les conjoncturistes car il permet de fournir un premier signal très rapidement.

Pour la zone euro, le CEPR (*Centre for Economic Policy Research*) diffuse depuis plusieurs années l'indicateur EuroCoin développé à la Banque d'Italie par Altissimo *et alii* (2001, 2010). Cet indicateur a pour objectif d'estimer tous les mois la croissance du PIB de la zone euro pour le trimestre coïncident, en enlevant les effets de très court terme (de fréquence inférieure à un an) par lissage. Le modèle utilisé pour synthétiser l'information est un modèle à facteurs dynamiques généralisé proposé par Forni, Hallin, Lippi et Reichlin (2000) appliqué à un très grand nombre de variables. D'un point de vue conjoncturel, cette mesure correspond à une sorte de croissance trimestrielle de moyen terme, mais ne vise pas à estimer précisément les chiffres des comptes trimestriels fournis par Eurostat. La première version d'EuroCoin possède une variance plus faible que la croissance trimestrielle du PIB. Le diagnostic conjoncturel qui en découle s'écarte sensiblement des comptes nationaux. Le CEPR a cherché à construire plus récemment une nouvelle version plus performante de l'indicateur EuroCoin (Altissimo *et alii*, 2010). L'objectif de ce nouvel indicateur demeure le même mais le nombre de variables utilisées en entrée de l'indicateur a été ramené de 951 à 145 (IPI, agrégats monétaires, taux d'intérêt, variables financières, indicateurs de demande, enquêtes d'opinion, variables de commerce et du marché du travail). Les variables en entrée n'ont pas été lissées par des méthodes statistiques, ce qui élimine certains effets de bord qui ont pu introduire un biais dans l'ancien EuroCoin.

Pour la France, Doz et Lenglart (1999) ont développé un indicateur résumé de l'enquête dans l'industrie de l'Insee à partir de six soldes d'opinion émis par les industriels interrogés tous les mois. Cette approche est maintenant largement utilisée à l'Insee pour calculer des indicateurs synthétiques à partir de l'information fournie par les enquêtes dans les différents secteurs. Clavel et Minodier (2009) étendent cet indicateur d'activité dans l'industrie en proposant un indicateur du climat des affaires pour l'activité économique dans son ensemble, qui intègre les enquêtes de l'Insee effectuées dans différents secteurs tels que les services, la construction, les ventes en gros et au détail.

De nombreux indicateurs d'activité économique ont été developpés à partir des modèles factoriels à changement de régimes. Kim et Nelson (1998) proposent une application sur les quatre principales séries économiques américaines (taux de croissance de l'IPI, de l'emploi, des revenus et des ventes au détail), également considérées par le *National Bureau of Economic Research* (NBER) pour la datation des récessions américaines. Ces mêmes séries sont considérées par Diebold et Rudebusch (1996), Chauvet (1998) et Chauvet et Piger (2008), qui estiment de manière simultanée un modèle similaire afin de construire un indicateur de retournement des cycles en temps réel. S'agissant de la France, Nguiffo-Boyom (2006) estime le modèle de Kim et Nelson (1998) de manière simultanée sur quatre séries d'enquêtes d'opinion de l'Insee afin de reproduire le cycle de croissance, qui mesure l'écart à la tendance de long terme. Pour la zone euro, Darné et Ferrara (2011) proposent une estimation en deux temps d'un modèle à facteurs dynamiques, dont le premier facteur estimé suit un modèle à changements de régimes, sur un ensemble de six séries d'indice de confiance dans l'industrie, pour les six principaux pays de la zone euro. Les auteurs développent ainsi un indicateur pour détecter en temps réel les points de retournement du cycle d'accélération de la zone monétaire.

Dans le cadre d'une approche multi-périodicité, Mariano et Murasawa (2003) ont appliqué leur modèle pour estimer un indicateur d'activité économique aux États-Unis. Mariano et Murasawa (2010) utilisent également une version de leur modèle pour calculer une série de PIB mensuel américain en estimant un modèle VAR à périodicités multiples qui intègre la série trimestrielle du taux de croissance du PIB ainsi que les quatre séries mensuelles traditionnellement utilisées par le NBER pour évaluer le cycle des affaires américains (emploi, revenus, production industrielle et ventes au détail). Cornec (2006) met également en place cette approche d'abord pour fournir une datation mensuelle du cycle économique français en utilisant deux séries trimestrielles (taux de croissance du PIB et emploi salarié) et deux séries mensuelles (IPI et dépenses de consommation des ménages), puis pour estimer un indicateur synthétique d'activité similaire à celui de Doz et Lenglart (1999) mais qui intègre la série trimestrielle de taux de croissance du PIB comme information supplémentaire. Les résultats empiriques de cette application soulignent que l'apport du PIB au premier facteur est négligeable par rapport à l'indicateur synthétique dans l'industrie. S'agissant encore de la France, Cornec et Deperraz (2006) ont implémenté un modèle à périodicités multiples pour développer un indicateur d'activité dans les services, à partir de trois soldes mensuels et de trois soldes trimestriels provenant de l'enquête de conjoncture de l'Insee dans les services. Cet indicateur peut être ainsi utilisé avantageusement par les conjoncturistes en complément de l'indicateur qui reflète le climat des affaires dans l'industrie manufacturière. Clavel et Minodier (2009) développent également une approche multi-périodicité pour intégrer les différentes enquêtes de l'Insee, qui sont échantillonnées en mensuel, bi-mensuel et trimestriel, dans leur indicateur du climat des affaires. Plus récemment, Camacho et Perez-Quiros (2010, 2011) ont développé deux indicateurs de croissance de court terme pour l'Espagne et la zone euro à partir d'un modèle à facteurs multi-périodicité qui intègre également des changements de régimes markoviens pour tenir compte du cycle économique. Enfin, Frale *et alii* (2010) ont développé un modèle à facteurs à multi-périodicité de petite dimension pour fournir une mesure du PIB mensuel en zone euro. Ces mêmes auteurs (Frale *et alii*, 2011) proposent également un modèle à facteurs multi-périodicité pour estimer un PIB mensuel en zone euro, appelé EuroMInd, à partir d'une désagrégation entre les côtés offre et demande. Cet indicateur repose sur la base de données officielle pour la zone euro développée par Eurostat (Euro-IND).

6.2 Prévision macroéconomique

Les modèles à facteurs dynamiques sont largement utilisés, en particulier par les banques centrales, comme outil de prévision de différentes variables macroéconomiques telles que le taux de croissance du PIB ou l'inflation (voir par exemple une revue dans Stock et Watson, 2006, ou Eickmeier et Ziegler, 2008). Lorsque l'horizon de prévision concerne la période en cours, on parle alors de *nowcasting* (voir sur ce point Giannone, Reichlin et Small, 2008). Les facteurs sont estimés à partir de bases de données mensuelles, qui sont utilisées pour suivre la conjoncture économique des pays comme, par exemple, les données d'enquêtes d'opinion auprès des ménages et des industriels (*soft data*), les variables de l'économie réelle (*hard data*) telles que les indices de production industrielle, la consommation des ménages, les ventes au détail ou les immatriculations de véhicules neufs et, enfin, les variables financières (prix des actions, prix du pétrole, taux d'intérêt ...). Pour un pays donné, une telle base peut comprendre quelques centaines de variables. Il est donc utile de pouvoir synthétiser ce vaste ensemble d'information en un vecteur de faible dimension à inclure dans des modèles standards.

Partant des résultats théoriques asymptotiques relatifs à la convergence des estimateurs dans ce type de modèle, les travaux originaux utilisaient le plus grand nombre de variables disponibles. Récemment, des auteurs se sont interrogés sur l'opportunité d'intégrer le plus grand nombre de variables pour améliorer la précision de la prévision. Par exemple, Barhoumi, Darné et Ferrara (2010) montrent de manière empirique dans le cas de la France que l'augmentation de l'ensemble d'information par désagrégation n'apporte pas d'amélioration significative pour la prévision à court terme du PIB. Boivin et Ng (2006) identifient des conditions sous lesquelles l'élargissement de la base de données pourrait détériorer la précision des estimateurs des facteurs et fournissent des règles empiriques pour éliminer les variables redondantes. Ces auteurs montrent que l'élargissement de la base de données n'est pas préférable si les nouvelles séries ajoutent trop de bruit idiosyncratique et / ou si elles augmentent trop fortement la corrélation croisée entre les erreurs idiosyncratiques. Bai et Ng (2008) utilisent des méthodes statistiques de type LARS (*Least Angle Regressions*), qui sont des régressions pondérées, pour identifier des sous-ensembles optimaux de prédicteurs (*targeted predictors*) à partir d'un ensemble plus grand. Schumacher (2010) souligne l'efficacité de cette approche en utilisant une base de données internationales pour prévoir la croissance allemande, très sensible aux fluctuations de l'environnement international. Charpin (2009) propose également une application de cette approche sur données françaises, qui semble fournir des résultats encourageants.

Une fois les facteurs estimés, la prévision de la variable d'intérêt Y_t à un horizon h se fait à l'aide d'une équation de régression univariée de type ARDL (*Autoregressive Distributed Lags*, voir équation (45) ci-dessous) ou à l'aide d'un processus multivarié de type VAR. Lorsqu'on cherche à prévoir à un horizon h supérieur à un pas, deux types d'approches co-existent : l'approche récursive, qui utilise pour un pas donné les prévisions effectuées aux pas précédents, et l'approche directe, qui cherche à prévoir la valeur à l'horizon h sans s'intéresser aux prévisions aux pas précédents. Dans un cadre général, la prévision directe de la variable à l'horizon h permet de réduire le biais de prévision dû à l'estimation des paramètres pouvant apparaître dans le cas d'une prévision récursive à pas multiples (voir par exemple Chevillon, 2007). Dans le cadre particulier des modèles à facteurs, selon les simulations menées par Boivin et Ng (2005), il ne semble pas exister de différence significative entre une prévision directe et une prévision récursive si on utilise des facteurs estimés. Toutefois, l'approche directe est privilégiée dans la plupart des applications.

Ainsi, l'équation univariée de prévision directe à un horizon h est donnée par :

$$\hat{Y}_{t+h|t} = \hat{\alpha}_h + \sum_{j=1}^{m} \hat{\beta}'_{hj} \hat{F}_{t-j+1} + \sum_{j=1}^{p} \hat{\phi}_{hj} Y_{t-j+1}, \tag{45}$$

où $\hat{F}_t$ est le vecteur de dimension r des facteurs estimés, m et p les ordres autorégressifs et $\hat{\beta}_{hj}$ un vecteur de coefficients estimés de dimension r. Les paramètres

α_h, β_{hj} et ϕ_{hj} dépendent de l'horizon h car, dans le cadre d'une prévision directe, ils varient en fonction de l'horizon considéré. Les $mr + p + 1$ paramètres du modèle sont estimés par les moindres carrés ordinaires. Dans l'équation (45), le nombre de facteurs r peut être spécifié par un des tests présentés précédemment. Toutefois $r = 3$ est souvent utilisé en pratique, car trois facteurs sont souvent suffisants pour expliquer une part significative de la variance des données. Trois variantes du modèle donné dans l'équation (45) sont généralement implémentées (voir Stock et Watson, 2002a, Boivin et Ng, 2005). La première, notée *DI* (*Diffusion Index*) est obtenue avec $m = 1$ et $p = 1$ dans (45) et donc inclut seulement l'information contemporaine $\hat{F}_t$. La deuxième, *DI-AR*, autorise une dynamique sur la série Y_t et correspond à $m = 1$ et $1 \leq p \leq 6$ dans (45). L'ordre autorégressif p optimal est alors obtenu par minimisation d'un critère d'information de type AIC ou BIC. Enfin, la spécification *DI-AR,Lag* de (45) correspond à $1 \leq m \leq 3$ et $0 \leq p \leq 3$, permettant ainsi des retards sur les facteurs et sur la variable Y_t. À nouveau, les paramètres m et p optimaux sont obtenus par minimisation d'un critère d'information. Notons que la spécification *DI-AR,Lag* n'est pas utilisée pour un facteur dynamique puisque ce facteur est supposé déjà intégrer une dynamique temporelle.

Boivin et Ng (2005) montrent par simulation que les différences sont négligeables en prévision, selon que l'on utilise des facteurs statiques ou dynamiques, ce que l'on retrouve de manière empirique dans Barhoumi, Darné et Ferrara (2010) sur des données françaises. De même, ces auteurs montrent que la spécification du modèle utilisée pour effectuer les prévisions n'a qu'une importance faible sur la qualité de la prévision, en particulier lorsque le nombre d'observations est élevé.

Un des problèmes majeurs, bien connu des prévisionnistes, qui apparaît lorsqu'on cherche à utiliser ces modèles pour la prévision en temps réel, est dû au fait que les données arrivent de manière échelonnée, entraînant ainsi des valeurs manquantes en fin d'échantillon (*ragged-edge data*). Plusieurs solutions sont proposées dans la littérature empirique, telle que la projection des données manquantes, soit par un modèle paramétrique de type autorégressif, soit par des moyennes-mobiles, ou le réalignement de la base de données sur les derniers points disponibles, si le nombre de variables est élevé. Dans le cadre des modèles à facteurs, l'estimation en deux étapes utilisant le filtre de Kalman (Doz, Giannone et Reichlin, 2011) permet de résoudre de manière élégante ce problème (Giannone, Reichlin et Small, 2008, ou Angelini *et alii*, 2011).

Parmi les nombreuses applications en prévision du taux de croissance du PIB, nous pouvons citer, par exemple, les articles de Stock et Watson (2002) ou Banerjee et Marcellino (2006) pour les États-Unis, les travaux de Barhoumi, Darné et Ferrara (2010, 2013) et Bessec et Doz (2013) sur la France, Forni, Hallin, Lippi et Reichlin (2000, 2003), Camba-Mendez et Kapetanios (2005), Marcellino, Stock et Watson (2005), Banerjee, Marcellino et Masten (2005), Ruenstler *et alii* (2009) ou Angelini *et alii* (2011) pour la zone euro, Schumacher (2007, 2010), Schumacher et Breitung (2008) et Eickmeier et Ziegler (2008) ou Marcellino et Schumacher (2010) pour l'Allemagne, Artis, Banerjee et Marcellino (2005) pour le Royaume-Uni et Van Nieuwenhuyze (2006) pour la Belgique. Matheson (2011) développe également des prévisions de PIB pour un grand nombre de pays avancés et émergents.

Il est à noter que les applications sur la prévision de l'inflation sont plus rares, voir par exemple Forni *et alii* (2003) ou Camba-Mendez et Kapetanios (2005) pour la zone euro ou de Bandt *et alii* (2007) pour la France. Boivin et Ng (2005) considèrent également des séries de prix américaines dans une optique prévisionelle. Il semble qu'il soit difficile d'améliorer la précision de la prévision d'inflation en utilisant un grand nombre de variables par rapport à une approche fondée sur un choix précis de variables d'intérêt. En revanche, des mesures d'inflation sous-jacente ont été menées avec ce type d'approche ; on renvoie le lecteur intéressé aux articles de Cristadoro *et alii* (2005) pour la zone euro ou Kapetanios (2004) pour le Royaume-Uni.

Différents travaux ont essayé d'identifier en particulier l'apport des variables financières pour la prévision macroéconomique à l'aide de modèles à facteurs appliqués à une base de données relatives à l'activité des marchés financiers. Par exemple, Forni *et alii* (2003) mettent en évidence que, au sein de la zone euro, les variables financières aident à prévoir l'inflation mais ne permettent pas de prévoir la production industrielle avec précision. Bellégo et Ferrara (2009, 2012) mettent en place un modèle factoriel pour évaluer la probabilité de récession en zone euro à partir d'un grand ensemble de variables mensuelles (modèle de type *factor-probit*[17]). En particulier, Bellégo et Ferrara (2009) montrent que, en utilisant uniquement des variables financières, cette approche aurait permis en temps réel d'anticiper l'occurrence de la récession de 2008-09 en zone euro dès la fin de l'année 2007.

[17]Un modèle de type *factor-probit* est obtenu en estimant d'abord des facteurs à partir d'une base de données, puis en les intégrant dans un modèle standard de type probit.

Une revue de la littérature relative aux résultats des modèles à facteurs en prévision se trouve dans l'article de Eickmeier et Ziegler (2008), qui mènent une méta-analyse sur les performances des modèles pour la prévision du PIB et de l'inflation. Les conclusions sont que les modèles à facteurs améliorent généralement les modèles économétriques à plus faible échelle, mais que les méthodes de combinaison de prévisions[18] constituent une alternative compétitive.

6.3 Applications en politique monétaire et économie internationale

Il existe une vaste littérature sur l'analyse de l'impact des chocs de politique monétaire sur la macroéconomie et sur la manière dont le mécanisme de transmission de ces chocs a évolué, en particulier pour les États-Unis. De manière classique, les impacts de chocs de politique monétaire sont souvent mesurés dans le cadre de modèles VAR de petite dimension, inférieure à 6 variables. Typiquement des modèles SVAR trivariés contenant le taux d'intérêt, la production et l'inflation sont utilisés. Au-delà de ce petit nombre de variables, il n'est guère possible d'estimer ce type des modèles à l'aide des méthodes standards (dans un cadre bayesien, voir, par exemple, de Mol, Giannone et Reichlin, 2008). Or, comme cela a été noté par Bernanke et Boivin (2003), la politique monétaire se conduit dans un environnement riche en données. Dans cet esprit, une catégorie de travaux analysant la politique monétaire, initiée par l'article de Bernanke, Boivin et Eliasz (2005), utilisent les modèles FAVAR. Le recours à cette modélisation a été motivé afin de pallier le problème des variables omises, généralement rencontrés dans la modélisation VAR traditionnelle. Ainsi, Bernanke, Boivin et Eliasz (2005), Stock et Watson (2005a) et Favero, Marcellino et Neglia (2005) ont utilisé les modèles FAVAR afin d'analyser la politique monétaire aux États-Unis et pour certains pays de la zone euro. Ils concluent tous que l'ajout aux modèles VAR de facteurs estimés à partir des modèles à facteurs permet une analyse plus fine des phénomènes en jeu, notamment en termes de chocs structurels. Par exemple, Del Negro et Otrok (2007) estiment un facteur commun à l'évolution des prix de l'immobilier résidentiel dans différents états américains, puis l'introduisent dans un FAVAR pour évaluer dans quelle mesure le relâchement de la politique monétaire a permis la création d'une bulle immobilière (les

[18] La combinaison de prévisions repose, en général, sur une moyenne pondérée de prévisions d'une même variable cible, à partir d'un grand nombre de modèles différents. On renvoie le lecteur intéressé à Timmerman (2006).

données de l'étude s'arrêtent en 2005). Ils montrent que l'impact des chocs de politique monétaire est faible par comparaison avec l'amplitude des fluctuations de prix observées jusqu'à la fin de leur échantillon.

Une autre partie de la littérature s'est penchée sur la question de savoir si le mécanisme de transmission des chocs avait changé au cours du temps et, le cas échéant, de quelle manière. Dans ce cadre, les modèles FAVAR à paramètres non constants au cours du temps (*Time-Varying* FAVAR ou TV-FAVAR) proposent une modélisation extrêmement souple, qui permet d'apporter des éclairages à cette question. Il semble que la littérature s'accorde sur le fait que ce mécanisme a connu des changements, même s'il n'émerge pas de consensus sur la manière dont cela s'est produit. Par exemple, à partir d'un ensemble de 803 variables trimestrielles de 1972 à 2007, Eickmeier *et alii* (2011) montrent que la volatilité des chocs monétaires aux États-Unis s'est substantiellement réduite du début des années 1980 à la veille de la crise des *subprimes* et que l'impact négatif d'un choc sur l'activité et les prix américains a décliné au cours du temps sur cette période. De même, ces auteurs soulignent que l'impact négatif d'un choc de politique monétaire sur les anticipations d'inflation et les taux d'intérêt à long terme a faibli au cours du temps. Les raisons évoquées par les auteurs sont les changements dans la politique monétaire et la globalisation des échanges commerciaux et financiers. Enfin, ces auteurs indiquent qu'il n'apparaît pas de différences entre périodes d'expansion et de récession dans le mécanisme de transmission. Baumeister, Liu et Mumtaz (2010) montrent également que, pour l'économie américaine, la réaction du PIB, de la consommation et de l'investissement à un choc monétaire a diminué au cours du temps sur la période 1960-2008. Notons toutefois que la plupart de ces études n'intègrent pas la période 2008-2009 au cours de laquelle les pays industrialisés ont connu leur plus forte récession depuis les années 1920.

D'autres applications des modèles FAVAR ont été menées pour analyser l'évolution de la synchronisation des cycles des affaires sur un plan international, en permettant de discriminer selon les chocs de différents types. Par exemple, Stock et Watson (2005b) estiment un FAVAR sur les PIB des pays du G7, leur permettant ainsi d'identifier les chocs communs internationaux, les effets domestiques dus à un choc international et ceux dus à un choc idiosyncratique. Ils concluent que la réduction de la volatilité des cycles du G7, à l'exception du Japon, observée entre le milieu des années 1980 et le milieu des années 2000, est principalement due à une réduction de l'amplitude des chocs internationaux communs (c'est la période dite de la *Grande Modération*). Kose, Otrok et Whiteman (2003) considèrent un modèle similaire pour mettre en évidence l'existence d'un cycle mondial à partir d'un ensemble de 60 pays. Ils montrent également que les facteurs spécifiques à la région ne jouent qu'un rôle mineur dans l'explication des fluctuations macroéconomiques. Bordo et Helbling (2010) se placent dans une perspective historique en utilisant des données annuelles de PIB de 1880 à 2008 pour 16 pays industrialisés et montrent une tendance à l'augmentation de la synchronisation entre ces pays. Les auteurs mettent en évidence le rôle des chocs communs dans cette évolution à l'aide d'un modèle FAVAR restreint estimé sur cette base de données.

On note également plusieurs applications des modèles à facteurs dans la mesure des cycles internationaux et de leur transmission entre les pays. Mansour (2003) et Helbling et Bayoumi (2003) estiment un cycle des affaires global, pour le monde et les pays du G7, et analysent la contribution de ce cycle commun aux variations économiques dans chaque pays. Kose, Otrok et Whiteman (2008) utilisent un modèle à facteurs dans un cadre bayesien pour estimer les composantes communes et idiosyncratiques des pays du G7, pour un ensemble d'agrégats économiques. Ces auteurs montrent que le facteur commun à ces pays explique une part plus importante de la variance sur la période 1986-2003 que sur les périodes précédentes, mettant en évidence une augmentation de la synchronisation des cycles au sein du G7. Eickmeier (2007) analyse la transmission des chocs structurels américains vers l'Allemagne en se fondant sur l'approche de Forni *et alii* (2004). Après avoir analysé les mouvements économiques communs dans la zone euro, Marcellino, Stock et Watson (2005) et Eickmeier (2005) tentent de donner des interprétations économiques aux facteurs communs en les reliant aux différents pays de la zone et/ou à certaines variables, en se fondant sur des mesures de corrélation.

7 Conclusion

Dans cet article, nous effectuons un état des lieux de la littérature sur les modèles à facteurs dynamiques. Ces modèles ont connu récemment un intérêt croissant de la part des chercheurs car ils peuvent répondre de manière adéquate à certains problèmes rencontrés en pratique, notamment l'inflation du nombre de données disponibles. Nous proposons ici une présentation des modèles et de leurs extensions les plus intéressantes, des principales méthodes d'estimation et des tests du nombre de facteurs. Dans la dernière partie, nous présentons quelques exemples récents d'application des modèles à facteurs dynamiques pour la prévision macroéconomique, la construction d'indicateurs conjoncturels et l'analyse des politiques monétaires et de l'économie internationale. Le succès des modèles à facteurs dynamiques fait que cette revue de la littérature ne prétend pas être exhaustive. Des extensions ont été très récemment développées, notamment pour intégrer plus de souplesse à travers des non-linéarités ou des mélanges de périodicités, et de nombreuses applications continuent d'être publiées. D'autre part, ces modèles sont maintenant de plus en plus comparés à d'autres méthodes économétriques qui permettent également de réduire la dimension du problème. Il apparaît ainsi que la recherche relative aux modèles à facteurs dynamiques nous semble avoir encore de beaux jours devant elle.

References

[1] Alessi L., Barigozzi M. et Capasso M. (2010). Improved penalization for determining the number of factors in approximate factor models. Statistics and Probability Letters, 80, 1806-1813.

[2] Altissimo F., Bassanetti A., Cristadoro R., Forni M., Hallin M., Lippi M. et Reichlin L. (2001). EuroCOIN: A real time coincident indicator of the euro area business cycle. Discussion Paper No. 3108, CEPR.

[3] Altissimo F., Cristadoro R., Forni M., Lippi M. et Veronese G. (2010). New EuroCOIN: Tracking economic growth in real time. The Review of Economics and Statistics, 92, 4, 1024-1034.

[4] Amengual D. et Watson M.W. (2007). Consistent estimation of the number of dynamic factors in a large N and T panel. Journal of Business and Economic Statistics, 25, 91-96.

[5] Anderson T.W. (1984). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. Wiley, New York.

[6] Angelini E., Camba-Méndez G., Giannone D., Rünstler G. et Reichlin L. (2011). Short-term forecasts of Euro area GDP growth. Econometrics Journal, 14, 1, C25-C44.

[7] Artis M., Banerjee A. et Marcellino M. (2005). Factor forecasts for the UK. Journal of Forecasting, 24, 279-298.

[8] Aruoba S., Diebold F.X. et Scotti C. (2009). Real-time measurement of business conditions. Journal of Business and Economic Statistics, 27, 4, 417-27.

[9] Bai J. et Ng S. (2002). Determining the number of factors in approximate factor models. Econometrica, 70, 191–221.

[10] Bai J. et Ng S. (2007). Determining the number of primitive shocks in factor models. Journal of Business and Economic Statistics, 25, 52-60.

[11] Bai J. et Ng S. (2008). Forecasting economic time series using targeted predictors. Journal of Econometrics, 146, 304-317.

[12] de Bandt, O., E. Michaux, C. Bruneau et A. Flageollet (2007). Forecasting inflation using economic indicators: The case of France, Journal of Forecasting, 26, 1, 1-22.

[13] Banerjee A. et Marcellino M. (2006). Are there any reliable leading indicators for US inflation and GDP growth? International Journal of Forecasting, 22, 137-151.

[14] Banerjee A. et Marcellino M. (2009). Factor-augmented error correction models. Dans Castle, J. et Shepard, N. (Eds.), *The Methodology and Practice of Econometrics - A Festschrift for David Hendry*, Oxford: Oxford University Press.

[15] Banerjee A., Marcellino M. et Masten I. (2005). Leading indicators for Euro area inflation and GDP growth. Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 67, 785-813.

[16] Barhoumi K., Darné, O. et Ferrara, L. (2010). Are disaggregate data useful for forecasting French GDP with dynamic factor models? Journal of Forecasting, 29, 1-2, 132-144.

[17] Barhoumi K., Darné, O. et Ferrara, L. (2013). Testing the number of factors for dynamic factor modelling: An empirical assessment for forecasting purpose. Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 75, 1, 64-79.

[18] Baumeister C., Liu, P. et Mumtaz, H. (2010), Changes in the transmission of monetary policy: Evidence from a time-varying factor-augmented VAR. Working Paper No. 401, Bank of England.

[19] Bellégo C. et Ferrara, L. (2009). Forecasting euro area recessions using time-varying binary response models for financial variables. Working Paper No. 259, Banque de France.

[20] Bellégo C. et Ferrara, L. (2012). A factor-augmented probit model for business cycle analysis. Economic Modelling, 29, 1793-1797.

[21] Bernanke B.S. et Boivin J. (2003). Monetary policy in a data-rich environment. Journal of Monetary Economics, 50, 525.

[22] Bernanke B. S., Boivin J. et Eliasz P. (2005). Measuring the effects of monetary policy: A factor-augmented vector autoregressive (FAVAR) approach. Quarterly Journal of Economics, 120, 387-422.

[23] Bessec, M. et C. Doz (2013). Prévision de court terme de la croissance du PIB français à l'aide de modèles à facteurs dynamiques. Économie et Prévision, à paraître.

[24] Boivin J. et Ng S. (2005). Understanding and comparing factor-based forecasts. International Journal of Central Banking, 1, 117-151.

[25] Boivin J. et Ng S. (2006). Are more data always better for factor analysis? Journal of Econometrics, 132, 169-194.

[26] Boivin J., Giannoni M.P. et Mihov I. (2009). Sticky prices and monetary policy: Evidence from disaggregated U.S. data. American Economic Review, 99, 350-384.

[27] Bordo M. et Helbling, T. (2010). International business cycle synchronization in historical perspective. Working Paper 16103, NBER.

[28] Breitung J. et Pigorsch U. (2010). A canonical correlation approach for selecting the number of dynamic factors. Working paper, University of Mannheim.

[29] Brillinger D.R. (1981). *Time Series: Data Analysis and Theory*. Holden-Day, San Francisco.

[30] Camacho M. et Perez-Quiros G. (2010). Introducing the EURO-STING: Short Term INdicator of Euro Area Growth. Journal of Applied Econometrics, 25, 663–694.

[31] Camacho M. et Perez-Quiros G. (2011). Spain-STING: Spain short-term indicator of growth. The Manchester School, 79, 594-616.

[32] Camba-Méndez G. et Kapetanios G. (2005). Forecasting euro area inflation using dynamic factor measures of underlying inflation. Journal of Forecasting, 25, 491-503.

[33] Campbell J.Y., Lo A.W. et MacKinlay A.C. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press, Princeton.

[34] Chamberlain G. et Rothschild (1983). Arbitrage, factor structure and mean-variance analysis in large asset markets. Econometrica, 51, 1305–1324.

[35] Charpin, F. (2009). Estimation précoce de la croissance. De la régression LARS au modèle à facteurs. Revue de l'OFCE, 2009/1, 108, 31-48.

[36] Chauvet M. (1998). An econometric characterisation of business cycle dynamics with factor structure and regime switching. International Economic Review, 39, 969-996.

[37] Chauvet, M. et Piger, J. (2008), A comparison of the real-time performance of business cycle dating methods. Journal of Business Economics and Statistics, 26, 1, 42-49.

[38] Chevillon G. (2007). Direct multi-step estimation and forecasting. Journal of Economic Surveys, 21, 746-785.

[39] Clavel L. et Minodier C. (2009). A monthly indicator for the French business climate. Document de Travail No. G2009/02, Insee.

[40] Clements, M. et Galvao, A.-B. (2008), Macroeconomic forecasting with mixed-frequency data : forecasting output growth in the United States, Journal of Business and Economic Statistics, 26.

[41] Connor G. et Korajczyk R.A. (1986). Performance measurement with the arbitrage pricing theory: A new framework for analysis. Journal of Financial Economics, 15, 373-394.

[42] Connor G. et Korajczyk R.A. (1988). Risk and return in an equilibrium APT: Application of a new test methodology. Journal of Financial Economics, 21, 255–289.

[43] Connor G. et Korajczyk R.A. (1993). A test for the number of factors in an approximate factor model. Journal of Finance, 48, 1263–91.

[44] Cornec M. et Deperraz, T. (2006). Un nouvel indicateur synthétique mensuel résumant le climat des affaires dans les services en France. Économie et Statistique, 395-396, 13-38.

[45] Cornec M. (2006). Analyse factorielle dynamique multifréquence appliquée à la datation de la conjoncture française. Économie et Prévision, 2006/1, 172, 29-43.

[46] Cristadoro R., Forni M., Reichlin L. et Veronese G. (2005). A Core Inflation Index for the Euro Area. Journal of Money, Credit and Banking, 37, 3, 539-560.

[47] D'Agostino, A. et Giannone D. (2012). Comparing alternative predictors based on large-panel factor models. Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 74, 2, 306-326.

[48] Darné O. et Ferrara L. (2011). Identification of slowdowns and accelerations for the euro area economy. Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 73, 3, 335-364.

[49] Del Negro M. et Otrok C. (2007). 99 luftballons: Monetary policy and the house price boom across US states, Journal of Monetary Economics, 54, 1962-1985.

[50] Del Negro M. et Otrok C. (2008). Dynamic factor models with time-varying parameters: measuring changes in international business cycles, Technical report, Federal Reserve Bank of New York.

[51] De Mol C., Giannone D. et Reichlin L. (2008). Forecasting using a large number of predictors: Is Bayesian shrinkage a valid alternative to principal components?, Journal of Econometrics, 146, 318-328.

[52] Dempster A., Laird N. et Rubin D. (1977). Maximum likelihood estimation from incomplete data. Journal of the Royal Statistical Society, 14:1-38.

[53] Diebold F.X. et Rudebusch G.D. (1996). Measuring business cycles: A modern perspective. Review of Economics and Statistics, 78, 67-77.

[54] Ding A.A. et Hwang J.T.G. (1999). Prediction intervals, factor analysis models, and high-dimensional empirical linear prediction. Journal of the American Statistical Association, 94, 446–455.

[55] Doz C. et Lenglart F. (1999). Analyse factorielle dynamique : test du nombre de facteurs, estimation et application à l'enquête de conjoncture dans l'industrie. Annales d'Économie et Statistiques, 54, 91-127.

[56] Doz C., Giannone D. et Reichlin L. (2011). A two-step estimator for large approximate dynamic factor models based on Kalman filtering. Journal of Econometrics, 164, 188-205.

[57] Doz C., Giannone D. et Reichlin L. (2012). A quasi maximum likelihood approach for large approximate dynamic factor models. Discussion Paper No. 5724, CEPR, à paraître dans Review of Economics and Statistics.

[58] Eickmeier S. (2005). Common stationary and non-stationary factors in the euro area analyzed in a large-scale factor model. Discussion Paper No. 2/2005, Bundesbank.

[59] Eickmeier, S. (2007). Business cycle transmission from the US to Germany - a structural factor approach. European Economic Review, 51, 521-551.

[60] Eickmeier S. et Ziegler C. (2008). How successful are dynamic factor models at forecasting output and inflation? A meta-analytic approach. Journal of Forecasting, 27, 3, 237-265.

[61] Eickmeier S., Lemke, W. et Marcellino, M. (2011). Classical time-varying FAVAR models - Estimation, forecasting and structural analysis. Discussion Paper No. 8321, CEPR.

[62] Eklund J. et Kapetanios G. (2008). A review of forecasting techniques for large data sets. Working Paper No 625, Department of Economics, Queen Mary, University of London.

[63] Favero C., Marcellino M. et Neglia F. (2005). Principal components at work: The empirical analysis of monetary policy with large datasets. Journal of Applied Econometrics, 20, 603-620.

[64] Ferrara, L. et C. Marsilli (2013). Financial variables as leading indicators of GDP growth: Evidence from a MIDAS approach during the Great Recession. Applied Economics Letters, 20, 3, 233-237.

[65] Forni M. et Lippi M. (1997). *Aggregation and the Microfoundations of Dynamic Macroeconomics*. Oxford University Press.

[66] Forni M. et Lippi M. (2011). The general dynamic factor model: One-sided representation results. Journal of Econometrics, 163, 23-28.

[67] Forni M. et Reichlin L. (1998). Let's get real: A factor-analytic approach to disaggregated business cycle dynamics. Review of Economic Studies, 65, 453–473.

[68] Forni M., Hallin M., Lippi M. et Reichlin L. (2000). The generalized dynamic-factor model: Identification and estimation. Review of Economics and Statistics, 82, 540-554.

[69] Forni M., Hallin M., Lippi M. et Reichlin L. (2003). Do financial variables help forecasting inflation and real activity in the euro area? Journal of Monetary Economics, 50, 1243-1255.

[70] Forni M., Hallin M., Lippi M. et Reichlin L. (2004). The generalized factor model: Consistency and rates. Journal of Econometrics, 119, 231–255.

[71] Forni M., Hallin M., Lippi M. et Reichlin L. (2005). The generalized dynamic factor model: One-sided estimation and forecasting. Journal of the American Statistical Association, 100, 830-840.

[72] Forni M., Giannone D., Lippi M. et Reichlin L. (2009). Opening the black box: Structural factor models with large cross-sections. Econometric Theory, 25, 1319–1347.

[73] Frale, C. Marcellino, M., Mazzi G.L. et Proietti T. (2010). Survey data as coincident or leading indicators. Journal of Forecasting, 29, 109-131.

[74] Frale, C. Marcellino, M., Mazzi G.L. et Proietti T. (2011). EUROMIND: A monthly indicator of the euro area economic conditions. Journal of the Royal Statistical Society: Series A, 174, 2, 439-470.

[75] Geweke J. (1977). The dynamic factor analysis of economic time series. Dans *Latent Variables in Socio Economic Models*, Aigner D.J. et Goldberger A.S. (eds). North Holland, Amsterdam.

[76] Ghysels, E., Sinko et Valkanov (2007). MIDAS Regressions: Further Results and New Directions. Econometric Reviews, 26, 53-90.

[77] Giannone D., Reichlin L. et Sala L. (2004). Monetary policy in real time. Dans Gertler M. et Rogoff K. (eds.) NBER Macroeconomics Annual, MIT Press.

[78] Giannone D., Reichlin L. et Sala L. (2006). VARs factor models and the empirical validation of equilibrium of business cycle models. Journal of Econometrics, 132, 257-279.

[79] Giannone D., Reichlin L. et Small D. (2008). Nowcasting: The real-time informational content of macroeconomic data. Journal of Monetary Economics, 55, 665-676.

[80] Gorman W. M. (1981). Some Engel curves. Dans Deaton A. (ed.) *Essays in the Theory and Measurement of Consumer Behavior in Honor of Sir Richard Stone*. Cambridge University Press, New York.

[81] Hallin M. et Liska R. (2007). Determining the number of factors in the general dynamic factor model. Journal of the American Statistical Association, 102, 603-617.

[82] Hallin M. et Liska R. (2011). Dynamic factors in the presence of blocks. Journal of Econometrics, 163, 29–41.

[83] Hamilton J.D. (1989), A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle, Econometrica, 57, 2, 357-384.

[84] Hamilton J.D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press.

[85] Harding M.C. (2009). Structural estimation of high-dimensional factor models. Mimeo, Department of Economics, Stanford University.

[86] Helbling, T. et Bayoumi, T. (2003). Are they all in the same boat? The 2000-2001 growth slowdown and the G7-business cycle linkages. Working Paper, WP/03/46, IMF.

[87] Jacobs J.P.A.M. et Otter P.W. (2008). Determining the number of factors and lag order in dynamic factor models: A minimum entropy approach. Econometric Reviews, 27, 385–397.

[88] Jones C.S. (2001). Extracting factors from heteroskedastic asset returns. Journal of Financial Economics, 62, 293–325.

[89] Jungbacker B. et Koopman S.J. (2008). Likelihood-based analysis for dynamic factor models. Discussion Paper NO 2008-0007/4, Tinbergen Institute, University Amsterdam.

[90] Jungbacker B., Koopman S.J. et van der Wel M. (2011). Maximum likelihood estimation for dynamic factor models with missing data. Journal of Economic Dynamics and Control, 35, 1358–1368.

[91] Kapetanios G. (2004). A note on modelling core inflation for the UK using a new dynamic factor estimation method and a large disaggregated price index dataset. Economics Letters, 85, 63-69.

[92] Kapetanios G. (2010). An alternative method for determining the number of factors in factor models with large datasets. Journal of Business and Economic Statistics, 28, 397-409.

[93] Kapetanios G. et Marcellino M. (2004). A comparison of estimation methods for dynamic factor models of large dimension. Queen Mary Working Paper No. 489, London.

[94] Kim C-J. et Nelson C.R. (1998). Business cycle turning points, a new coincident index, and tests of duration dependence based on a dynamic factor model with regime switching. Review of Economics and Statistics, 80, 188-201.

[95] Kim C-J. et J.S. Yoo (1995). New index of coincident indicators: A multivariate Markov Switching factor model approach. Journal of Monetary Economics, 36, 607-630.

[96] Kose M. A., Otrok C. et Whiteman C. (2003). International business cycles: World, region and country-specific factors. American Economic Review, 93, 4, 1216-1239.

[97] Kose M. A., Otrok C. et Whiteman C. (2008). Understanding the evolution of world business cycles. Journal of International Economics, 75, 110-130.

[98] Krolzig H.M. et Hendry D. (2001). Computer automation of general-to-specific model selection procedures, Journal of Economic Dynamics and Control, 25, 831-866.

[99] Lawley D.N. et Maxwell A.E. (1971). *Factor Analysis in a Statistical Method* Butterworth, London.

[100] Lewbel A. (1991). The rank of demand systems: Theory and nonparametric estimation. Econometrica, 59, 711–730.

[101] Lopes H. F. et West, M. (2004). Bayesian model assessment in factor analysis. Statistica Sinica, 14, 41-67.

[102] Mansour M.J. (2003). Do national business cycles have an international origin? Empirical Economics, 28, 223-247.

[103] Marcellino M., Stock, J. et Watson M. (2005) Macroeconomic forecasting in the euro area: Country specific versus euro wide information. European Economic Review, 47, 1-18.

[104] Marcellino M. et Schumacher, C. (2010). Factor-MIDAS for nowcasting and forecasting with ragged-edge data: A model comparison for German GDP. Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 72, 518-550.

[105] Mariano R. et Murasawa Y. (2003). A new coincident index of business cycles based on monthly and quarterly series. Journal of Applied Econometrics. 18, 427-443.

[106] Mariano R. et Murasawa Y. (2010). A coincident index, common factors and monthly real GDP. Oxford Bulletin of Economics and Statistics. 72, 1, 27-46.

[107] Matheson, T. (2011). New indicators for tracking growth in real time. Working Paper, No. WP/11/43, International Monetary Fund.

[108] Motta G., Hafner C. et von Sachs R. (2011). Locally stationary factor models: Identification and nonparametric estimation. Econometric Theory, 27, 6, 1279-1319.

[109] Mumtaz, H. et Surico, P. (2009), The transmission of international shocks: A factor-augmented VAR approach. Journal of Money, Credit and Banking, 41, 71-100.

[110] Newbold et Harvey, A. (2002), Forecast combination and encompassing, in *A Companion to Economic Forecasting*, Chapter 12, Clements M. and Hendry D. (eds), Basil Blackwell, Oxford.

[111] Nguiffo-Boyom M. (2006). Un indicateur de retournement conjoncturel pour la France: une application du modèle à facteur avec changements de régimes. Économie et Prévision, 2006/1, 172.

[112] Onatski A. (2009). Testing hypotheses about the number of factors in large factor models. Econometrica, 77, 1447-1479.

[113] Onatski A. (2010). Determining the number of factors from empirical distribution of eigenvalues. The Review of Economics and Statistics, 92, 4, 1004-1016..

[114] Pĕna D. et Poncela, P. (2006a). Forecasting with non-stationary dynamic factor models. Journal of Econometrics, 119, 291-321.

[115] Pěna D. et Poncela, P. (2006b). Non-stationary dynamic factor analysis. Journal of Statistical Planning and Inference, 136, 1237-1257.

[116] Ross S. (1976). The arbitrage theory of asset pricing. Journal of Economic Theory, 13, 341-360.

[117] Ruenstler G., Barhoumi K., Cristadoro R., Reijer D., Jakaitiene A., Jelonek P., Rua A., Ruth K., Benk S., et Van Nieuwenhuyze C. (2009). Short-term forecasting of GDP using large monthly data sets: A pseudo real-time forecast evaluation exercise. Journal of Forecasting, 28, 7, 595-611.

[118] Sargent T. et Sims C. (1977). Business cycle modelling without pretending to have too much a priori economic theory. Dans *New Methods in Business Cycle Research*, Sims C. (ed). Federal Reserve Bank of Minneapolis, Minneapolis.

[119] Schumacher C. (2007). Forecasting German GDP using alternative factor models based on large datasets. Journal of Forecasting, 26, 271-302.

[120] Schumacher C. (2010). Factor forecasting using international targeted predictors: The case of German GDP. Economics Letters, 107, 2, 95-98.

[121] Schumacher C. et Breitung J. (2008). Real-time forecasting of German GDP based on a large factor model with monthly and quarterly data. International Journal of Forecasting, 24, 368-398.

[122] Shumway R.H. et Stoffer D.S. (1982). An approach to time series smoothing and forecasting using the EM algorithm. Journal of Time Series Analysis, 3, 253–264.

[123] Steiger J.H. (1979). Factor indeterminacy in the 1930s and the 1970s some interesting parallels. Psychometrika, 40, 157–167.

[124] Stock J. et Watson M. (1989). New Indexes of Coincident and Leading Economic Indicators. In NBER Macroeconomics Annual, NBER.

[125] Stock J. et Watson M. (1998). Diffusion indexes. Working Paper No 6702, NBER.

[126] Stock J. et Watson M. (1999). Forecasting inflation. Journal of Monetary Economics, 44, 293–335.

[127] Stock J. et Watson M. (2002). Macroeconomic forecasting using diffusion indexes. Journal of Business and Economic Statistics, 20, 147-162.

[128] Stock J. et Watson M. (2005a). Implications of dynamic factor models for VAR analysis. Working Paper No 11467, NBER.

[129] Stock J. et Watson M. (2005b). Understanding changes in international business cycle dynamics. Journal of the European Economic Association, 3, 5, 968-1006.

[130] Stock J. et Watson M. (2006). Forecasting with many predictors. In Elliott G., Granger C.W.J. et Timmermann A. (eds.), *Handbook of Economic Forecasting*, Vol. 1, North-Holland, Amsterdam.

[131] Timmerman, A. (2006), Forecast combinations. In Elliott G., Granger C.W.J. et Timmermann A. (eds.), *Handbook of Economic Forecasting*, Vol. 1, 135-196, North-Holland, Amsterdam.

[132] Van Nieuwenhuyze C. (2006). A generalized dynamic model for the Belgian Economy - useful business cycle indicators and GDP growth forecasts. Working Paper No 80, National Bank of Belgium.

[133] Watson M.W. et Engle R.F. (1983). Alternative algorithms for estimation of dynamic MIMIC, factor, and time varying coefficient regression models. Journal of Econometrics, 23, 385-400.

[134] White H. (1982) Maximum likelihood estimation of misspecified models. Econometrica, 50, 1-25.

[135] Yao Q. et Pan J. (2008). Modelling multiple time series via common factors. Biometrika, 95, 365-379.

Documents de Travail

420. M. Bussière, “In Defense of Early Warning Signals,” January 2013
421. A.-L. Delatte and C. Lopez, “Commodity and Equity Markets: Some Stylized Facts from a Copula Approach,” February 2013
422. F. R. Velde, “On the Evolution of Specie: Circulation and Weight Loss in 18th and 19th Century Coinage,” February 2013
423. H. Ehrhart and S. Guerineau, “Commodity price volatility and tax revenue: Evidence from developing countries,” February 2013
424. M. Bussière, S. Delle Chiaie and T. A. Peltonen, “Exchange Rate Pass-Through in the Global Economy,” February 2013
425. N. Berardi, E. Gautier and H. Le Bihan, “More Facts about Prices: France Before and During the Great Recession,” March 2013
426. O. Darne, G. Levy-Rueff and A. Pop, “Calibrating Initial Shocks in Bank Stress Test Scenarios: An Outlier Detection Based Approach,” March 2013
427. N. Dumontaux and A. Pop, “Contagion Effects in the Aftermath of *Lehman*’s Collapse: Evidence from the US Financial Services Industry,” March 2013
428. A. Bénassy-quéré and G. Roussellet, “Fiscal Sustainability in the Presence of Systemic Banks: the Case of EU Countries,” March 2013
429. Nicoletta Berardi, “Social networks and wages in Senegal’s formal sector,” March 2013
430. K. Barhoumi, O. Darné et L. Ferrara, “Une revue de la littérature des modèles à facteurs dynamiques,” Mars 2013

Pour accéder à la liste complète des Documents de Travail publiés par la Banque de France veuillez consulter le site :
www.banque-france.fr

For a complete list of Working Papers published by the Banque de France, please visit the website:
www.banque-france.fr

Pour tous commentaires ou demandes sur les Documents de Travail, contacter la bibliothèque de la Direction Générale des Études et des Relations Internationales à l'adresse suivante :

For any comment or enquiries on the Working Papers, contact the library of the Directorate General Economics and International Relations at the following address :

BANQUE DE FRANCE
49- 1404 Labolog
75049 Paris Cedex 01
tél : 0033 (0)1 42 97 77 24 ou 01 42 92 63 40 ou 48 90 ou 69 81
email : 1404-ut@banque-france.fr